Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya 2018
p-ISSN : 2550-0384; e-ISSN : 2550-0392

SEMIHIPERGRUP HIMPUNAN MATRIKS HERMITE MIRING DAN SIFAT-SIFATNYA

Dena Aurum Salehah

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman
dena.reds@gmail.com

Amalia Lutfiana Dzulfida

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman

Ari Wardayani

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman

Idha Sihwaningrum

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *In this paper, it is proved that the set of skew Hermitian matrices is an Abelian group under matrices addition operation. Besides, there is a normal subgroup of skew Hermitian matrices group in the form of diagonal matrices with it's entries being pure imaginary numbers. Furthermore, it is proved that the set of skew Hermitian matrices which is equipped with a certain binary hyperoperations is a semihypergroup. This semihypergroup has identity elements, each element of this semihypergroup has an inverse, and it is commutative.*

Keywords*: skew Hermitian matrices, diagonal matrices, semihypergroup.*

ABSTRAK. Pada makalah ini dibuktikan bahwa himpunan matriks Hermite miring merupakan grup Abel terhadap operasi penjumlahan matriks. Selain itu, terdapat subgrup normal dari grup matriks Hermite miring yang berupa matriks diagonal dengan entri-entrinya bilangan imajiner murni. Lebih lanjut, akan dibuktikan bahwa himpunan matriks Hermite miring yang dilengkapi dengan suatu hiperoperasi biner merupakan semihipergrup. Semihipergrup tersebut memiliki elemen identitas, setiap elemennya memiliki invers, dan bersifat komutatif.

Kata Kunci: matriks Hermite miring, matriks diagonal, semihipergrup.

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang aljabar dikenal grup Abel, yaitu suatu grup yang memenuhi sifat komutatif. Dalam hal ini grup adalah salah satu struktur aljabar yang memenuhi sifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Grup Abel merupakan grup yang memiliki sifat komutatif, sehingga setiap subgrup dari grup Abel merupakan subgrup normal. Himpunan matriks yang dengan elemen berupa bilangan riil yang disertai dengan operasi penjumlahan matriks merupakan salah satu contoh dari grup Abel. Dalam bidang aljabar terdapat himpunan matriks. Diantara himpunan matriks tersebut terdapat beberapa matriks yang memiliki bentuk khusus, contohnya matriks Hermite yang ditemukan oleh Charles Hermite pada tahun 1855. Matriks Hermite yaitu matriks yang sama dengan matriks transpose konjugatenya, sedangkan matriks yang sama dengan negatif dari matriks transpose konjugatenya disebut matriks Hermite miring. Pada tahun 2013, Sullivan mengkaji mengenai sifat dari matriks Hermite miring. Oleh karena itu, pada makalah ini akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks Hermite miring yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan matriks merupakan grup Abel.

Hiperstruktur aljabar adalah generalisasi dari struktur aljabar. Salah satu hiperstruktur aljabar adalah semihipergrup. Semihipergrup $(H, \circ)$ adalah himpunan tak kosong H yang dilengkapi dengan satu hiperoperasi biner dan memenuhi sifat asosiatif, yaitu

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \text{ untuk setiap } x, y, z \in H.$$

Menurut Davvaz (2016: 46), ini berarti bahwa

$$\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v.$$

Hiperstruktur aljabar merupakan generalisasi dari struktur aljabar. Akan tetapi, jika pada struktur aljabar hasil operasi dua buah elemen berupa elemen, pada hiperstruktur aljabar, hasil hiperoperasi dua buah elemen berupa himpunan. Semihipergrup merupakan salah satu contoh dari hiperstruktur aljabar yang memiliki berbagai aplikasi, antara lain di bidang geometri, graf, kimia, kriptografi, fuzzy dan *artificial intelligence*. Apabila himpunan matriks Hermite miring merupakan suatu grup, maka dapat dibentuk suatu subgrup normal sehingga dapat diperoleh koset (koset kiri sekaligus koset kanan) dari grup tersebut. Dengan demikian, pada makalah ini akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks Hermite miring merupakan suatu semihipergrup. Selanjutnya, akan ditunjukkan juga bahwa semihipergrup tersebut memiliki elemen identitas, setiap elemennya memiliki invers, dan bersifat komutatif.

2. METODE PENELITIAN

Langkah awal yang dilakukan adalah menunjukkan bahwa himpunan matriks Hermite miring dengan operasi penjumlahan matriks merupakan grup Abel. Kemudian, dibentuk suatu subgrup dari grup matriks Hermite miring dan dibuktikan bahwa subgrup tersebut merupakan subgrup normal. Selanjutnya, didefinisikan hiperoperasi biner yang hasilnya melibatkan koset kiri dari subgrup normal dalam grup matriks Hermite miring agar hasilnya merupakan elemen dari *power set* dari grup matriks Hermite miring. Kemudian, dibuktikan bahwa himpunan matriks Hermite miring yang dilengkapi dengan hiperoperasi biner tersebut membentuk semihipergrup. Selanjutnya, ditunjukkan juga bahwa semihipergrup himpunan matriks Hermite miring memenuhi beberapa sifat dari semihipergrup, yaitu memiliki elemen identitas, setiap elemennya memiliki invers, dan bersifat komutatif.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Grup Matriks Hermite Miring

Diberikan himpunan matriks Hermite miring H yang berordo $n \times n$, yaitu

$$H = \left\{ \left. \begin{pmatrix} b_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & b_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & b_{nn}i \end{pmatrix} \right| a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

dengan $j = 1, 2, \ldots, n$ dan $k = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 3.1

Sistem matematika $(H, +)$ *merupakan grup Abel.*

Bukti:

i) Karena untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2} \in H$ berlaku $\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} \in H$, maka operasi + tertutup di himpunan *H*.

ii) Operasi + bersifat asosiatif, karena untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}, \mathbf{H}_3 \in H$ berlaku

$$\left(\mathbf{H_1}+\mathbf{H_2}\right)+\mathbf{H_3}=\mathbf{H_1}+\left(\mathbf{H_2}+\mathbf{H_3}\right).$$

iii) Di *H*, terdapat elemen identitas terhadap operasi $+$, yaitu

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix} 0i & 0+0i & \cdots & 0+0i \\ -0+0i & 0i & \cdots & 0+0i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0+0i & -0+0i & \cdots & 0i \end{pmatrix}$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{H_1}\in H$ berlaku $\mathbf{H_1}+\mathbf{O}=\mathbf{H_1}$ dan $\mathbf{O}+\mathbf{H_1}=\mathbf{H_1}$.

iv) Setiap $\mathbf{H_1}=\begin{pmatrix} b_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & b_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & b_{nn}i \end{pmatrix}\in H$ memiliki invers terhadap operasi $+$. Hal ini dikarenakan terdapat

$$-\mathbf{H_1}=\begin{pmatrix} -b_{11}i & -a_{12}-b_{12}i & \cdots & -a_{1n}-b_{1n}i \\ a_{12}-b_{12}i & -b_{22}i & \cdots & -a_{2n}-b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}-b_{1n}i & a_{2n}-b_{2n}i & \cdots & -b_{nn}i \end{pmatrix}\in H$$

Yang mengakibatkan $\mathbf{H_1}+\left(-\mathbf{H_1}\right)=\mathbf{O}$ dan $\left(-\mathbf{H_1}\right)+\mathbf{H_1}=\mathbf{O}$.

v) Di *H*, operasi penjumlahan matriks $+$ bersifat komutatif karena untuk setiap $\mathbf{H_1},\mathbf{H_2}\in H$ berlaku

$$\mathbf{H_1}+\mathbf{H_2}=\mathbf{H_2}+\mathbf{H_1}.$$

Dengan demikian, dari i) sampai v) dapat disimpulkan bahwa $\left(H,+\right)$ adalah grup Abel. ■

3.2 Subgrup Normal dari Matriks Hermite Miring

Diambil suatu subhimpunan dari H yakni himpunan matriks diagonal berordo $n\times n$ dengan entri pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni, yang dinotasikan dengan

$$D=\left\{\left.\begin{pmatrix} x_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i \end{pmatrix}\right| x_{jk}\in\mathbb{R}, i^2=-1\right\}$$

untuk $j=k=1,2,\ldots,n.$

Teorema 3.2 *Misalkan G suatu grup dan S merupakan subhimpunan tak kosong dari G. Himpunan S merupakan subgrup dari G jika hanya jika untuk setiap* $a,b\in S$ *berlaku* $a-b\in S$.

Perhatikan bahwa untuk $\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}\in D$ dengan $\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix} x_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i \end{pmatrix}$

dan $\mathbf{D}_2=\begin{pmatrix} y_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn}i \end{pmatrix}$, maka berlaku

$$\mathbf{D_1}-\mathbf{D}_2=\begin{pmatrix} x_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_{11}i-y_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i-y_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i-y_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (x_{11}-y_{11})i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (x_{22}-y_{22})i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_{nn}-y_{nn})i \end{pmatrix}$$

sehingga $\mathbf{D_1} - \mathbf{D}_2 \in D$. Dengan demikian, himpunan matriks diagonal berordo $n \times n$ dengan entri pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni merupakan subgrup dari himpunan matriks Hermite miring. ■

Teorema 3.3 *Setiap subgrup dari grup Abel merupakan subgrup normal.*

Akan dibuktikan bahwa himpunan matriks diagonal berordo $n \times n$ dengan entri pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni merupakan subgrup normal dari himpunan matriks Hermite miring. Perhatikan bahwa untuk setiap $\mathbf{H_1} \in H$ dan $\mathbf{D_1} \in D$, maka berlaku

$$\mathbf{H_1} + \mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} b_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & b_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & b_{nn}i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}i + x_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & b_{22}i + x_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & b_{nn}i + x_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}i + b_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & x_{22}i + b_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & x_{nn}i + b_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22}i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}i & a_{12}+b_{12}i & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i \\ -a_{12}+b_{12}i & b_{22}i & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+b_{1n}i & -a_{2n}+b_{2n}i & \cdots & b_{nn}i \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{D_1} + \mathbf{H_1}.$$

Dengan demikian, himpunan matriks diagonal berordo $n \times n$ dengan entri pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni merupakan subgrup normal dari himpunan matriks Hermite miring. ■

3.3 Semihipergrup Himpunan Matriks Hermite Miring

Telah diketahui bahwa himpunan matriks Hermite miring yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan matriks merupakan grup dan himpunan matriks diagonal berordo $n \times n$ dengan entri pada diagonal utamanya adalah bilangan imajiner murni merupakan subgrup normal dari himpunan matriks Hermite miring. Kemudian, didefinisikan hiperoperasi $\circ$ pada himpunan matriks Hermite miring H yang hasilnya melibatkan koset kiri dari grup matriks Hermite miring dalam subgrup matriks diagonal, yaitu

$$\mathbf{H_1} \circ \mathbf{H_2} = (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2})D, \text{ untuk setiap } H_1, H_2 \in H.$$

Hiperstruktur aljabar $(H, \circ)$ merupakan semihipergrup. Berikut penjelasannya.

a) Untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2} \in H$ berlaku $\mathbf{H_1} \circ \mathbf{H_2} = (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2})D$. Hal ini berarti bahwa hasil hiperoperasi dua buah elemen di H merupakan koset kiri D dalam H. Dengan demikian, hasil hiperoperasi $\circ$ untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2} \in H$ merupakan elemen dari *power set* H yang tak kosong.

b) Hiperoperasi $\circ$ pada H bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}, \mathbf{H_3} \in H$ berlaku

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{H_1} \circ \mathbf{H_2}) \circ \mathbf{H_3} \\
&= (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2})D \circ \{\mathbf{H_3}\} \\
&= \{(\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_1}, (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_2}, \dots\} \circ \{\mathbf{H_3}\} \\
&= \left[\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_1}\right) \circ \mathbf{H_3}\right] \cup \left[\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_2}\right) \circ \mathbf{H_3}\right] \cup \dots \\
&= \left[\left(\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_1}\right) + \mathbf{H_3}\right)D\right] \cup \left[\left(\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_2}\right) + \mathbf{H_3}\right)D\right] \cup \dots \\
&= \left\{\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_1}\right) + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_1}, \left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_1}\right) + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_2}, \dots\right\} \cup \\
&\quad \left\{\left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_2}\right) + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_1}, \left((\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2}) + \mathbf{D_2}\right) + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_2}\right\} \cup \dots \\
&= \{\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} + \mathbf{D_1} + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_1}, \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} + \mathbf{D_1} + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_2}, \dots\} \cup \\
&\quad \{\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} + \mathbf{D_2} + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_1}, \mathbf{H_1} + \mathbf{H_2} + \mathbf{D_2} + \mathbf{H_3} + \mathbf{D_2}, \dots\} \cup \dots \\
&= \left\{\mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_1}\right) + \mathbf{D_1}, \mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_1}\right) + \mathbf{D_2}, \dots\right\} \cup \\
&\quad \{\mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_2}\right) + \mathbf{D_1}, \mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_2}\right) + \mathbf{D_2}, \dots\} \cup \dots \\
&= \left[\mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_1}\right)D\right] \cup \left[\mathbf{H_1} + \left((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_2}\right)D\right] \cup \dots \\
&= [\mathbf{H_1} \circ ((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_1})] \cup [\mathbf{H_1} \circ ((\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_2})] \cup \dots
\end{aligned}$$

$$= \{\mathbf{H_1}\} \circ \{(\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_1}, (\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3}) + \mathbf{D_2}, \dots\}$$
$$= \{\mathbf{H_1}\} \circ (\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3})D$$
$$= \{\mathbf{H_1}\} \circ (\mathbf{H_2} + \mathbf{H_3})$$
$$= \mathbf{H_1} \circ (\mathbf{H_2} \circ \mathbf{H_3}). \qquad \blacksquare$$

3.4 Sifat-sifat Semihipergrup Himpunan Matriks Hermite Miring

Suatu semihipergrup dapat mempunyai beberapa sifat, antara lain adalah memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers, elemen idempotent, elemen nol, sifat komutatif, dan lain-lain. Pada makalah ini hanya akan ditunjukkan bahwa semihipergrup matriks Hermite miring memenuhi sifat komutatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki elemen invers. Phanthawimol, dkk. (2011) menyatakan bahwa suatu $e \in H$ dikatakan elemen identitas dari $(H, \circ)$ jika $x \in x \circ e \cap e \circ x$, untuk setiap $x \in H$. Selanjutnya, Zhan, dkk. (2011) menyatakan bahwa suatu $x' \in H$ dikatakan elemen invers dari $x \in H$ jika $(x \circ x') \cap (x' \circ x)$ memuat minimal satu elemen identitas. Semihipergrup $(H,\circ)$ dikatakan semihipergrup komutatif apabila untuk setiap $x, y \in H$, berlaku $x \circ y = y \circ x$ (Phanthawimol, dkk., 2011).

Akan dibuktikan beberapa sifat yang dipenuhi oleh semihipergrup himpunan matriks Hermite miring.

a) Semihipergrup memiliki elemen identitas

Diketahui bahwa untuk setiap $\mathbf{D_i} \in D \subset H$ memiliki invers, yaitu $(-\mathbf{D_i})$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$(-\mathbf{D_i}) \circ \mathbf{H_j} \cap \mathbf{H_j} \circ (-\mathbf{D_i})$$
$$= \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j}\right) D \cap \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i})\right) D$$
$$= \left\{\left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j}\right) + \mathbf{D_1}, \dots, \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j}\right) + \mathbf{D_i}, \dots\right\}$$
$$\cap \left\{\left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i})\right) + \mathbf{D_1}, \dots, \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i})\right) + \mathbf{D_i}, \dots\right\}$$
$$= \left\{\left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j}\right) + \mathbf{D_1}, \dots, (-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} + \mathbf{D_i}, \dots\right\}$$
$$\cap \left\{\left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i})\right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) + \mathbf{D_i}, \dots\right\}$$

$$= \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) + \mathbf{D_i}, \dots \right\}$$

$$\cap \left\{ \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j} + \mathbf{O}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) + \mathbf{D_i}, \dots \right\}$$

$$\cap \left\{ \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j} + \mathbf{O}, \dots \right\} \cap \left\{ \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\} \cap \left\{ \left(\mathbf{H_j} + (-\mathbf{D_i}) \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\}$$

Karena $\mathbf{H_j} \in \left\{ \left((-\mathbf{D_i}) + \mathbf{H_j} \right) + \mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{H_j}, \dots \right\} = (-\mathbf{D_i}) \circ \mathbf{H_j} \cap \mathbf{H_j} \circ (-\mathbf{D_i})$ untuk setiap $\mathbf{H_j} \in H$ dengan $j = 1,2, \dots$, maka $(-\mathbf{D_i}) \in H$ dengan $i = 1,2, \dots$ merupakan elemen identitas di semihipergrup himpunan matriks Hermite miring. Jadi, elemen identitas di semihipergrup $(H,\circ)$ tidak tunggal.

b) Setiap elemen di semihipergrup mempunyai invers

Karena $(-\mathbf{D_i}) \in H$ dengan $i = 1,2, \dots$ merupakan elemen identitas di semihipergrup himpunan matriks Hermite miring, maka dapat dicari elemen invers dari setiap elemen di H. Diketahui $(H, +)$ merupakan grup, sehingga setiap $\mathbf{H_j} \in H$ dengan $j = 1,2, \dots$ memiliki invers terhadap operasi biner penjumlahan matriks yaitu $(-\mathbf{H_j}) \in H$ dengan $j = 1,2, \dots$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\mathbf{H_j} \circ \left(-\,\mathbf{H_j}\right) \cap \left(-\,\mathbf{H_j}\right) \circ \mathbf{H_j} = \left(\mathbf{H_j}(-\mathbf{H_j}) \right) D \cap \left((-\mathbf{H_j})\mathbf{H_j} \right) D.$$

Karena $(-\mathbf{D_i}) \in \mathbf{H_j} \circ \left(-\,\mathbf{H_j}\right) \cap \left(-\,\mathbf{H_j}\right) \circ \mathbf{H_j}$, maka setiap $H_j \in H$ memiliki elemen invers yang tak tunggal.

c) Semihipergrup memenuhi sifat komutatif

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{H_1} \circ \mathbf{H_2} &= (\mathbf{H_1} + \mathbf{H_2})D, \\ &= (\mathbf{H_2} + \mathbf{H_1})D \\ &= \mathbf{H_2} \circ \mathbf{H_1}. \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{H_1} \circ \mathbf{H_2} = \mathbf{H_2} \circ \mathbf{H_1}$, untuk setiap $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2} \in H$, maka semihipergrup himpunan matriks Hermite miring memenuhi sifat komutatif. ■

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Himpunan matriks Hermite miring yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan matriks merupakan grup Abel. Terdapat subgrup normal dari grup matriks Hermite miring yaitu himpunan matriks diagonal dengan entri-entrinya bilangan imajiner murni. Dengan suatu hiperoperasi biner yang didefinisikan pada himpunan matriks Hermite miring yang hasilnya melibatkan koset kiri dari grup matriks Hermite miring dalam subgrup matriks diagonal, dapat dibuktikan bahwa himpunan matriks yang dilengkapi hiperoperasi biner tersebut membentuk semihipergrup. Semihipergrup matriks Hermite miring memenuhi beberapa sifat semihipergrup, antara lain memiliki elemen identitas tak tunggal, setiap elemennya memiliki invers yang tak tunggal, dan bersifat komutatif.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kementerian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi serta Universitas Jenderal Soedirman yang telah mendanai penelitian penulis melalui Hibah Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi tahun 2018.

DAFTAR PUSTAKA

Davvaz, B., *Semihypergroup Theory*, Academic Press, 2016.

Phanthawimol, W., Punkla, Y, Kwakpatoon, K. and Kemprasit, Y., *On Homomorphisms of Krasner Hyperrings*, Analele Stiintifice ale Universitatii, AL.I. CUZA, Mathematica, Tomul LVII, (2011), 239-246.

Michael,E,O'Sullivan,(2013), *Lecture Notes for Math 623 Matrix Analysis*.

Vougiouklis, T., *On the Hypersructure Theory*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics. **40** (2016), 603-620.

Zahedi, M. M., Torkzadeh, L., and Borzooei, R. A., *Hyper I-algebras and Polygrup*, Quasigroups and Related Systems, **11** (2004), 103-113.

Zhan, J., Mousavi, S.Sh. and Javarpour, M., *On Hyperactions of Hypergroups*, U.P.B. Sci. Bull. Series A., **73**(1) (2011), 117-128.