Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya 2018
p-ISSN : 2550-0384; e-ISSN : 2550-0392

KONSTANTA TERBAIK FUNGSI MAKSIMAL KETAKSAMAAN HARDY

Gani Gunawan

Program Studi Matematika FMIPA UNISBA
Jl. Ranggamalela No.1 Bandung
ggani9905@gmail.com

ABSTRAK. Ketaksamaan maksimal Hardy-Littlewood pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika berkebangsaan Inggris yang bernama G.H. Hardy dan J.E Littlewood pada tahun 1930 untuk satu dimensi (lihat [3] dan [8]). Selanjutnya *N. Wiener* [1939] memperumum ketaksamaan tersebut untuk dimensi yang lebih tinggi. Melalui ketaksamaan tersebut didefinisikan suatu operator fungsional yang mendefinisikan fungsi maksimal, yaitu

$$Mf(x) := \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\mu\left(B\left(x,R\right)\right)} \int_{B(x,R)} \left|f(y)\right| dy\,, \text{ untuk } f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)\; x \in \mathbb{R}^n$$

Dalam hal ini operator maksimal tersebut bersifat terbatas di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $1<p<\infty$, sedemikian sehingga menurut [6], [7], [8] ada konstanta yang terkecil yang membatasi operator tersebut untuk setiap *f*. Dalam makalah ini akan diperlihatkan suatu konstanta terkecil tersebut sebagai kontstanta terbaik untuk ketakasamaan Hardy-Littlewood.

Kata kunci : Ketaksamaan Hardy-Littlewood, Fungsi Maksimal

1. PENDAHULUAN

Dalam makalah ini pertama-tama akan dibahas tentang fungsi distribusi terukur. Selanjutnya akan diperlihatkan ketaksamaan maksimal Hardy dan buktinya. Pada proses pembuktiannya tampak adanya suatu konstanta yang bergantung pada dimensinya, dan dapat mempengaruhi kuat lemahnya maksimalitas dari ketaksamaan tersebut. Melalui pembuktian tersebut dapat ditentukan konstanta yang paling baik dari ketaksamaan maksimalnya. Dalam hal ini Konstanta terbaik diartikan sebagai konstanta positif yang paling kecil sedemikian sehingga ketaksamaan maksimal berlaku untuk semua *f*.

2. FUNGSI DISTRIBUSI TERUKUR

Misalkan diberikan suatu fungsi terukur $f : \mathbb{R}^n \to \left[0,\infty\right]$, didefinisikan fungsi distribusi $\lambda_f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ oleh $\lambda_f\left(t\right) := \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|f(x)\right| > t\right\}$, $t > 0$. Jelas bahwa λ_f adalah fungsi yang menurun. Lebih lanjut dikatakan bahwa jika $\lambda_f\,(t)$

$< \infty$ untuk suatu $t > 0$, maka $\lambda_f(t) \to 0$ untuk $t \to \infty$. Selain itu jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ maka

$$\lambda_{|f|}(t) \le \frac{1}{t}\|f\|_1 \quad \text{untuk setiap } t > 0.$$

Oleh karena itu, dengan memisalkan $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}$ akan diperoleh

$$\|f\|_1 \ge \int_{E_t} |f(x)| dx \ge t\mu(E_t) = t\lambda_{|f|}(t).$$

Sementara itu jika $\mu\{f > t\} = \mu\{x : f(x) > t\}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ dan $t \in (0,\infty)$, maka diperoleh fakta berikut,

Teorema 1.

$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_0^\infty \mu\{f > t\} dt$, dan untuk setiap $p \ge 1$ $\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\mu =$ $p\int_0^\infty \mu\{f > t\} t^{p-1} dt$.

Bukti.

Perhatikan bahwa $|f| = f$ untuk $f \ge 0$. Maka untuk suatu $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}(t)\, dt\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,f(x)]}(t)\, dx\, dt \\
&= \int_0^\infty \mu\{x : f(x) > t\} dt \\
&= \int_0^\infty \mu\{f > t\} dt.
\end{aligned}$$

Akibatnya untuk suatu $p \ge 1$ dapat ditulis,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \\
&= \int_0^\infty \mu\{x : |f(x)|^p > t\} dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \mu\left\{ f^p > t \right\} dt$$

$$= \int_0^\infty \mu\left\{ f > t^{1/p} \right\} dt \, .$$

Dengan memisalkan $t^{1/p} = s$, maka $s^p = t$ dan $dt = ps^{p-1}\, ds$. Karenanya diperoleh

$$\int_0^\infty \mu\left\{ f > t^{1/p} \right\} dt = p\int_0^\infty \mu\left\{ f > s \right\} s^{p-1} ds \, .$$

Jadi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p dx = p\int_0^\infty \mu\left\{ f > s \right\} s^{p-1} ds \, .$$

$\square$

3. FUNGSI MAKSIMAL KETAKSAMAAN HARDY

Sekarang akan diperlihatkan suatu teorema ketaksamaan Hardy yang merupakan ketaksamaan maksimal. Dalam pembahasan bagian ini akan dilihat bagaimana fungsi distribusi terukur dapat digunakan untuk pembuktiannya.

Misalkan $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$. *Fungsi maksimal Mf* didefinisikan oleh

$$Mf(x) := \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\mu\left(B\left(x,R\right)\right)} \int_{B(x,R)} \left| f(y) \right| dy \, , \; x \in \mathbb{R}^n$$

Dalam hal ini $B(R) = B(x,R)$ adalah bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di titik $x \in \mathbb{R}^n$ dengan radius $R > 0$, yaitu $B(x,R) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : d\left(x,y\right) < R \right\}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Di mana $\left(\mathbb{R}^n, d, \mu\right)$ adalah ruang metrik terukur, dengan d adalah jarak pada $\mathbb{R}^n$ dan μ ukuran Borel pada $\mathbb{R}^n$. Pemetaan M: $f \to Mf$ selanjutnya disebut sebagai operator maksimal. Operator M ini mempunyai sifat (lihat [4] hal.4) sebagai berikut

(i) $M(f + g) \leq Mf + Mg$ dan $M(\lambda f) = |\lambda| Mf$ untuk setiap $f, g \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ dan $\lambda \in X$

(ii) Jika $|f| \leq |g|$ h.d.m untuk $f, g \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$ maka $Mf \leq Mg$

(iii) $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ untuk setiap $f \in L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$

Selanjutnya jika $f \in L^1$, dipunyai suatu fakta, yaitu

$$\mu\{Mf > t\} \leq \frac{3^n}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \qquad (*)$$

lihat [5], halaman 5. Akibat dari fakta (*) tersebut diperoleh ketaksamaan Hardy-Littlewood yang dinyatakan dalam teorema berikut,

Teorema 2 (Hardy-Littlewood).

Jika $1 < p < \infty$ dan $f \in L^p$, maka $Mf \in L^p$ dan

$$\|Mf\|_p \leq C_{p,n} \|f\|_p$$

Di mana untuk $C_{p,n}$ terbatas untuk $p \to \infty$ dan $C_{p,n}$ tidak terbatas untuk $p \to 1$.

Bukti.

Perhatikan bahwa untuk $f \geq 0$, $Mf = M|f|$, dan pilih suatu konstanta $0 < c < 1$ (yang akan ditentukan konstanta terbaiknya kemudian). Definisikan untuk $t > 0$, fungsi distribusi dari f, yaitu $\lambda_f(t) := \mu\{x : |f(x)| > ct\}$ sedemikian sehingga untuk $f \in L^P(\mathrm{P}^n)$, definisikan $f = g_t + h_t$ dengan

$$g_t(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } f(x) > ct \\ 0 \quad, & \text{jika } f(x) \leq ct \end{cases}$$

Jadi, $0 \leq h_t(x) \leq ct$ untuk setiap x dan dengan demikian $h_t \in L^\infty$. Selanjutnya dapat dinyatakan bahwa $Mf \leq Mg_t + Mh_t \leq Mg_t + ct$, dan didapat $Mf - ct \leq Mg_t$. Perhatikan bahwa $g_t \in L^1(\mathrm{P}^n)$ dan $h_t \in L^\infty(\mathrm{P}^n)$. Jadi jika $Mf(x) > t$, maka $(1-c)t \leq Mg_t(x)$. Selanjutnya dimisalkan $E_t = \{f > ct\}$. Akibat dari ketaksamaan (*) diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda\{Mf > t\} &\leq \lambda\{Mg_t > (1-c)t\} \\ &\leq \frac{3^n}{(1-c)t}\|g_t\|_1 \\ &\leq \frac{3^n}{(1-c)t}\int_{E_t} f \; dx_1 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi distribusi Mf didapat

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx = p\int_0^\infty \lambda\{Mf > t\}\; t^{p-1} dt$$

$$= p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{Mf}(t)dt$$

$$\leq \frac{3^n p}{1-c}\int_0^\infty t^{p-2}\left(\int_{E_t} f\ dx\right) dt$$

$$= \frac{3^n p}{1-c}\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x)\int_0^{f(x)/c} t^{p-2}\ dt\right) dx$$

$$= \frac{3^n p}{1-c}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{p-1}\left(\frac{f(x)}{c}\right)^{p-1} dx$$

$$= \frac{3^n p}{1-c}\frac{c^{1-p}}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\ dx$$

$$= C_{p,n}\left(\| f \|_p\right)^p .$$

Jadi

$$\|Mf\|_p \leq \left(\frac{3^n p}{1-c}\frac{c^{1-p}}{p-1}\right)^{1/p} \| f \|_p .$$

□

Pilih $c = \frac{1}{p'} = \frac{(p-1)}{p}$, maka diperoleh konstanta yang terbaik.

4. KESIMPULAN

Jika $f \in L^\infty$, maka jelas bahwa $\|Mf\|_\infty \leq \| f \|_\infty$. Ini berarti operator maksimal M memetakan L^∞ ke dirinya sendiri. Dengan kata lain operator M terbatas di L^∞. Namun jika p =1 operator makasimal M bersifat lemah, sedangkan untuk p > 1 bersifat kuat. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa operator maksimal M terbatas di L^p(P^n).

DAFTAR PUSTAKA

[1]. E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princenton University Press, Princenton, N.J, 1970.

[2]. E.M. Stein, *Harmonic Analysis*: *real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals,* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1993.

[3]. G.H. Hardy and J.E Littlewood, *A Maximal Theorem with Function Theoritic Application*, Collected Papers of G.H Hardy, v.2, Oxford Univ.Press, 1967, 509-545.

[4]. Joshua H. Lifton, *Regularity*, Mathematics Senior Conference, Swarthmore College Mathematics, 19 April 2001.

[5]. Joshua H. Lifton, *Measure and Integration*, Lecture Notes , Swarthmore College Mathematics, Desember, 2003.

[6]. R. Fefferman, *Maximal functions in Analysis*, The University of Chicago REU, 2005.

[7]. Steven Finch, *Hardy-Littlewood Maximal Inequalities*, Paper of Mathematics, 12 Oktober 2003.

[8]. Walter Rudin, *Real and Complex Analyisis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.