**Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya 2018**
**p-ISSN : 2550-0384; e-ISSN : 2550-0392**

# PENYELESAIAN PERSAMAAN STOKES MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER DI *WHOLE SPACE*

**Yason Dawson Imawan Karo-karo**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman
dawsonyason@gmail.com

**Sri Maryani**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

**Idha Sihwaningrum**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

***ABSTRACT.*** *The Stokes equation is a linearization of the Navier-Stokes model. The Navier-Stokes model is formed by three components, from mass conservation, momentum conservation, and transport equations. This research discussed about the solution of velocity (u) of the Stokes equation by using Fourier transforms in a space of n-dimension in whole space*

***Keywords****: The Stokes equation, Fourier Transform, Whole Space, Mass Conservation, Momentum Conservation.*

**ABSTRAK.** Sistem persamaan Stokes merupakan linierisasi dari model Navier-Stokes. Sistem persamaan Navier-Stokes terbentuk dari tiga komponen yaitu konservasi massa, konservasi momentum, dan persamaan transport. Penelitian ini bertujuan untuk mencari solusi *velocity* (u) dari persamaan Stokes menggunakan transformasi Fourier di ruang berdimensi n, di *whole space*.

**Kata Kunci**: Persamaan Stokes, Transformasi Fourier, *Whole Space*, Konservasi Massa, Konservasi Momentum**.**

## 1. PENDAHULUAN

Fluida adalah suatu zat yang berubah bentuk secara terus menerus jika diberikan tegangan atau gaya (Lihat [3]). Fluida mempunyai beberapa sifat fisik, diantaranya adalah densitas dan viskositas. Viskositas (atau kekentalan) adalah ukuran kekentalan fluida yang menyatakan besarnya gesekan terhadap fluida. Sementara itu, densitas (atau kerapatan) suatu fluida didefinisikan sebagai massa per satuan volume. Viskositas akan berubah jika terjadi perubahan suhu. Jika suatu fluida mengalami perubahan viskositas ketika ada gaya yang berkerja pada fluida, maka fluida tersebut dinamakan fluida *non*-Newton. Akibatnya, fluida *non*-Newton tidak memiliki viskositas yang konstan. Contoh fluida n*on*-Newton adalah lumpur, odol, dan susu kental. Sementara itu, fluida yang tidak mengalami perubahan viskositas ketika ada gaya bekerja pada fluida, maka fluida tersebut dinamakan fluida Newton. Jadi, viskositas fluida Newton bernilai konstan. Contoh fluida Newton adalah cairan dan gas. Selanjutnya, berdasarkan densitasnya, aliran fluida diklasifikasikan menjadi aliran termampatkan (*compressible*) dan aliran tak-termampatkan (*incompressible*). Aliran fluida mengalami perubahan densitas, maka dikatakan aliran termampatkan; sedangkan aliran fluida yang tidak mengalami perubahan densitas, disebut aliran tak-termampatkan. (Lihat [4]). Aliran fluida termampatkan dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial, yang salah satunya adalah persamaan Stokes. Sistem persamaan Stokes pada fluida termampatkan merupakan linerisasi dari model Navier-Stokes yang terbentuk dari tiga komponen, yaitu konservasi massa, konservasi momentum, dan persamaan transport. Persamaan Stokes ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analitik, salah satunya adalah dengan menggunakan Transformasi Fourier.

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan yang muncul adalah bagaimana penyelesaian persamaan Stokes menggunakan transformasi Fourier untuk model aliran fluida termampatkan? Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh penyelesaian khusus persamaan Stokes menggunakan transformasi Fourier untuk model aliran fluida termampatkan.

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini membahas tentang penyelesaian Persamaan Stokes menggunakan transformasi Fourier di *Whole Space*.

### 2.1 Persamaan Stokes

Diketahui persamaan Stokes sebagai berikut (Lihat [1]) :

$$\begin{aligned} &\lambda\rho + \gamma div\vec{u} = f \\ &\lambda\vec{u} - \alpha\Delta\vec{u} - \beta\nabla div\vec{u} + \gamma\nabla\rho = \vec{g} \\ &\vec{u}\big|_{\partial\Omega} = \vec{0} \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $\vec{u} = (u_1, ...u_N)$ dan $\vec{0} = (0,...,0)$, $\alpha$ dan $\gamma$ adalah positif konstanta, dan $\beta$ adalah konstanta, sehingga $\alpha + \beta > 0$. Selanjutnya, diketahui

$$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_N)$$

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right)$$

$$div = \Delta = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_N} \right]$$

Pada persamaan (1), ubah menjadi $\rho = \lambda^{-1} f - \lambda^{-1}\gamma div\vec{u}$, dengan $\lambda \neq 0$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\lambda\vec{u} - \alpha\Delta\vec{u} - \left(\beta + \gamma^2\lambda^{-1}\right)\nabla div\vec{u} = \vec{g} - \gamma\nabla\lambda^{-1} f \text{ dalam } \Omega, \ \vec{u}\big|_{\partial\Omega} = \vec{0}. \tag{2}$$

Misalkan $\beta + \gamma^2\lambda^{-1} = \eta_\lambda$ dan $\vec{g} - \gamma\nabla\lambda^{-1} f = \vec{f}$, maka persamaan (2) dapat dibentuk menjadi persamaan berikut

$$\lambda\vec{u} - \alpha\Delta\vec{u} - \eta_\lambda\nabla div\vec{u} = \vec{f} \qquad \text{di } \Re^N. \tag{3}$$

Langkah berikutnya, perhatikan persamaan (3), aplikasikan *div* pada persamaan (3), diperoleh

$$\left(\lambda - \left(\alpha + \eta_\lambda\right)\Delta\right) div\vec{u} = div\vec{f} \tag{4}$$

Perhatikan persamaan (3), dapat diketahui bahwa

$$\left(\lambda - \alpha\Delta\right)\vec{u} = \vec{f} + \eta_\lambda \left(\lambda - \left(\alpha + \eta_\lambda\right)\Delta\right)^{-1} \nabla div\vec{f} \tag{5}$$

Dengan demikian,

$$\vec{u} = \left(\lambda - \alpha\Delta\right)^{-1}\vec{f} - \left(\lambda - \alpha\Delta\right)^{-1}\Delta^{-1}\nabla div\vec{f} + \left(\lambda - \left(\alpha + \eta_\lambda\right)\Delta\right)^{-1}\Delta^{-1}\nabla div\vec{f} \tag{6}$$

## 2.2 Transformasi Fourier dan Invers Transformasi Fourier untuk Persamaan Stokes

Berdasarkan sifat-sifat dari transfromasi Fourier (Lihat [2]), persamaan (6) dapat ditransformasikan dengan menggunakan transformasi Fourier untuk $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)$ adalah

$$\vec{u} = \frac{\vec{f}}{\alpha\left(\lambda\alpha^{-1} + |\xi|^2\right)} + \left(\frac{\sum_{k=1}^{N} \xi_j \xi_k \partial f_k}{|\xi|^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha\left(\lambda\alpha^{-1} + |\xi|^2\right)} + \frac{1}{\left(\lambda - (\alpha + \eta_\lambda)|\xi|^2\right)}\right) \qquad (7)$$

Persamaan (7) merupakan hasil dari proses transformasi Fourier. Terakhir, dengan invers dari transformasi Fourier untuk persamaan (7), diperoleh

$$\overrightarrow{u_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \mathrm{F}_{\xi}^{-1}\left[\frac{\delta_{jk} - \xi_j \xi_k |\xi|^{-2}}{\alpha^{-1}\lambda + |\xi|^2} f_k(\xi)\right](x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha + \eta_\lambda} \mathrm{F}_{\xi}^{-1}\left[\frac{\xi_j \xi_k |\xi|^{-2} f_k(\xi)}{(\alpha + \eta_\lambda)^{-1}\lambda + |\xi|^2}\right](x)$$

## 3. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, diperoleh kesimpulan dan saran sebagai berikut.

### 3.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh adalah penyelesaian persamaan Stokes dengan menggunakan transformasi Fourier sebagai berikut

$$\overrightarrow{u_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \mathrm{F}_{\xi}^{-1}\left[\frac{\delta_{jk} - \xi_j \xi_k |\xi|^{-2}}{\alpha^{-1}\lambda + |\xi|^2} f_k(\xi)\right](x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha + \eta_\lambda} \mathrm{F}_{\xi}^{-1}\left[\frac{\xi_j \xi_k |\xi|^{-2} f_k(\xi)}{(\alpha + \eta_\lambda)^{-1}\lambda + |\xi|^2}\right](x)$$

### 3.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis menyelesaiakan persamaan Stokes berdasarkan penyelesaian analitik, yaitu dengan menggunakan transformasi Fourier. Sebagai kelanjutan dari penelitian ini, penulis menyarankan untuk mengkaji persamaan Stokes dengan penyelesaian secara numerik.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Enomoto, Y., dan Shibata, Y., *On the $\mathcal{R}$-Sectoriality and the Initial Boundary Value Problem for the Viscous Compressible Fluid Flow,* 441-505, 2010.

[2] Folland, G. B., *Fourier Analysis and Its Applications,* A Division of Wadsworth, Inc., United States of America, 1992.

[3] Munson, R. B. dan Theodore, H. O., Wade, W. H., dan Alric, P.R., *Fundamentals of Fluid Mechanics Seventh Edition,* John Willey and Sons, Inc. United States of America, 1940.

[4] Pritchard, P. J., *Introduction to Fluid Mechanics Eighth Edition,* John Willey and Sons, Inc., United States of America, 2011.