Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya 2018
p-ISSN : 2550-0384; e-ISSN : 2550-0392

ANALISIS DINAMIK MODEL *SIR* DENGAN SKEMA BEDA HINGGA TAK-STANDAR

Nugroho Sapto Yudanto Yudasubrata

Universitas Jenderal Soedirman
atosapto@gmail.com

ABSTRACT. *The SIR model is a mathematical model that describes the dynamic of the spread of infectious diseases by dividing the human populations into three groups, there are individual Susceptible group, individual Infective group, and individual Recovered group. The form of this model is a non-linear differential equation system that difficult to be resolved in exact, so a numerical method is required to obtain a solution near the exact value. Non-standard finite difference scheme is one of numerical method that can be used to solve non-linear differential equation system. In this research, the discrete SIR model is constructed by a non-standard finite difference scheme. Compared with the fourth-order Runge-Kutta method, non-standard finite difference scheme consistently keep the stability of the equilibrium point, although the stepsize parameter is changed.*

Keywords: *equilibrium point , non-standard finite difference scheme, Runge-Kutta method, SIR model, stability.*

ABSTRAK. Model SIR adalah model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular dengan membagi populasi manusia menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu Susceptible (rentan terhadap penyakit), kelompok individu Infective (terinfeksi penyakit), dan kelompok individu Recovered (sembuh dari penyakit). Model ini berbentuk sistem persamaan diferensial non linier yang sulit diselesaikan secara eksak, sehingga metode numerik diperlukan untuk mendapatkan penyelesaian yang mendekati nilai eksak. Skema beda hingga tak-standar merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial non linier. Dalam penelitian ini, dikaji model diskrit SIR yang diperoleh dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar. Dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde empat, skema beda hingga tak-standar tetap menjaga kestabilan titik kesetimbangan, meskipun ukuran langkah waktu diubah-ubah.

Kata kunci: kestabilan, metode Runge-Kutta, model SIR, skema beda hingga tak-standar, titik kesetimbangan.

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam beberapa dekade terakhir telah banyak dikembangkan model matematika yang menjelaskan dinamika penyakit menular yang biasa disebut model epidemi. Pada model epidemi, umumnya populasi dibagi menjadi beberapa kelas yang berbeda. Salah satu model matematika yang termasuk dalam kategori ini adalah model *SIR* yang membagi populasi menjadi kelompok individu rentan terhadap infeksi suatu penyakit (*Susceptible*), kelompok individu terinfeksi (*Infective*), dan kelompok individu sembuh dari infeksi (*Recovered*).

Pada umumnya model epidemi yang berbentuk sistem persamaan diferensial non linier tidak dapat diselesaikan secara eksak. Oleh karena itu, metode pendekatan numerik diperlukan untuk mendapatkan penyelesaian yang mendekati nilai eksak. Diskritisasi akan mentransformasikan sistem persamaan diferensial ke dalam sistem persamaan beda.

Penelitian dan kajian tentang model *SIR* sudah banyak dilakukan. Salah satunya adalah penelitian Sarrayu (2010) yang telah mendapatkan penyelesaian numerik dari model *SIR* menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Pada penelitian ini, dibahas mengenai penyelesaian model *SIR* dengan menggunakan skema beda hingga tak-standar. Skema beda hingga tak-standar dapat digunakan untuk meminimalkan kesalahan numerik akibat kesalahan pemotongan (*truncation error*) dari deret Taylor dengan menerapkan generalisasi beda maju dan pendekatan tak lokal. Skema ini memiliki kelebihan yaitu akan tetap menjaga sifat kestabilan meskipun ukuran langkah waktu berubah-ubah.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian masalah pada latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara mengkonstruksi model *SIR* dengan skema beda hingga tak-standar dan bagaimana perbandingan kestabilan model *SIR* yang dikonstruksi dengan skema beda hingga tak-standar dengan metode Runge-Kutta orde empat pada perubahan nilai *stepsize* (ukuran langkah waktu).

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji cara mengkonstruksi model *SIR* dengan skema beda hingga tak-standar dan mengkaji perbandingan kestabilan model *SIR* yang dikonstruksi dengan skema beda hingga tak-standar dengan metode Runge-Kutta orde empat pada perubahan nilai *stepsize* (ukuran langkah waktu).

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Sebagai masukkan untuk mengkaji model *SIR* dan diselesaikan secara numerik menggunakan skema beda hingga tak-standar.
2. Dapat menerapkan ilmu matematika dalam fenomena-fenomena nyata dan untuk menambah pengetahuan terutama dalam bidang matematika.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Langkah-langkah

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. Mendiskritisasi model *SIR* dengan skema beda hingga tak-standar.
2. Membandingkan hasil simulasi model *SIR* yang telah dikontruksi dengan skema beda hingga tak-standar dengan skema Runge Kutta orde empat.

2.2 Variabel

Variabel dan parameter yang digunakan pada penilitian ini dijelaskan pada Tabel 2.1

Tabel 1. Keterangan dari variabel dan parameter

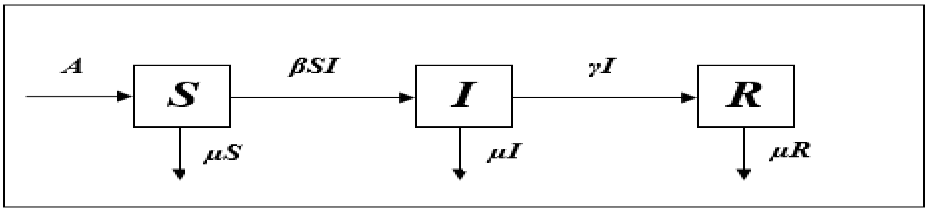
Simbol	Definisi	Jenis	Syarat	Satuan
N	Total populasi manusia	Variabel	$N \geq 0$	Jiwa
s	Jumlah individu rentan	Variabel	$s \geq 0$	Jiwa
i	Jumlah individu terinfeksi	Variabel	$i \geq 0$	Jiwa
r	Jumlah individu sembuh	Variabel	$r \geq 0$	Jiwa
A	Tingkat kelahiran	Parameter	$0 < A < 1$	per satuan waktu
μ	Tingkat kematian alami	Parameter	$0 < \mu < 1$	per satuan waktu
β	Tingkat penularan penyakit	Parameter	$0 < \beta < 1$	per satuan waktu
γ	Tingkat kesembuhan individu terinfeksi	Parameter	$0 < \gamma < 1$	per satuan waktu

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model *SIR*

Model *SIR* adalah model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular (Ma dan Li, 2009:1). Pada model ini, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok individu, yaitu kelompok individu rentan (*Susceptible*), kelompok individu terinfeksi (*Infective*), dan kelompok individu sembuh (*Recovered*).

Alur penyebaran penyakit model *SIR* disajikan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Alur penyebaran penyakit model *SIR*

Dengan populasi yang tertutup, dinamika penyebaran penyakit menular yang menyebabkan perubahan jumlah setiap kelompok pada masing-masing sub populasi, dijelaskan pada uraian berikut ini.

1. Jumlah individu rentan (*Susceptible*).

Jumlah individu rentan mengalami penambahan karena adanya kelahiran individu rentan dengan tingkat kelahiran sebesar A dan mengalami penurunan karena adanya individu rentan yang terinfeksi dengan tingkat penularan sebesar β. Selain itu, pengurangan jumlah individu rentan juga disebabkan oleh adanya kematian individu rentan dengan tingkat kematian alami sebesar μ.

2. Jumlah individu terinfeksi (*Infective*).

Jumlah individu terinfeksi mengalami penambahan karena adanya individu rentan yang terinfeksi dengan tingkat penularan sebesar β. Pengobatan pada individu yang terinfeksi diberikan untuk mengurangi jumlah kematian atau memperbesar kesembuhan dengan tingkat kesembuhan sebesar γ dan jumlah individu terinfeksi akan berkurang karena adanya kematian alami dengan tingkat kematian sebesar μ.

3. Jumlah individu sembuh (*Recovered*).

Jumlah individu sembuh mengalami penambahan karena adanya kesembuhan individu terinfeksi dengan tingkat kesembuhan sebesar γ. Akan tetapi jumlah individu sembuh mengalami penurunan karena adanya kematian indivu sembuh dengan tingkat kematian alami sebesar μ.

Dengan demikian, model *SIR* dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

Model *SIR* memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (TE_0) sebesar $TE_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0\right)$ dan titik kesetimbangan endemik (TE_E) sebesar $TE_E = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{A}{\mu+\gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \gamma\left(\frac{A}{\mu(\mu+\gamma)} - \frac{1}{\beta}\right)\right)$.

3.2 Diskritisasi Model *SIR* dengan Skema Beda Hingga Tak-Standar

Pendiskritisasian model *SIR* dengan skema beda hingga tak-standar didasari pada dua prinsip (Mickens, 1990), yaitu:

1. Penggantian dari turunan orde pertama diskrit

$$\frac{dx}{dt} \to \frac{x(k+1) - x(k)}{\phi(h)}. \qquad (1)$$

Perhatikan bahwa turunan didekati dengan beda maju tetapi dengan menggunakan fungsi penyebut $\phi(h)$ dengan $\phi(h) = h + o(h^2)$ dan h adalah ukuran langkah waktu. Jika dipilih $\phi(h) = h$ dan menerapkan pendekatan non lokal pada fungsi linier dan non linier, maka persamaan (1) tetap merupakan skema beda hingga tak-standar karena $o(h^2)$ adalah fungsi yang nilaniya mendekati nol, sehingga dapat diabaikan.

2. Penggantian dari fungsi linier dan non linier dari $x(t)$ dengan pendekatan non lokal. Sebagai contoh untuk orde pertama dari persamaan diferensial adalah

$$x(t) \to x(k+1)$$

$$x(t)y(t) \to x(k+1)y(k).$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu *Susceptible* dengan skema beda hingga tak-standar adalah sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta SI$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(n+1) - S(n)}{h} = A - \mu S(n+1) - \beta S(n+1) I(n)$$

$$\Leftrightarrow S(n+1) = \frac{S(n) + hA}{1 + h\mu + h\beta I(n)}.$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu *Infective* dengan skema beda hingga tak-standar adalah sebagai berikut

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \gamma I$$

$$\Leftrightarrow \frac{I(n+1) - I(n)}{h} = \beta S(n+1) I(n) - \mu I(n+1) - \gamma I(n+1)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1)(1 + h\mu + h\gamma) = I(n) + h\beta S(n+1) I(n)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1)(1 + h\mu + h\gamma) = I(n) + h\beta \frac{S(n) + hA}{1 + h\mu + h\beta I(n)} I(n)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1) = \frac{I(n)\left[1 + h\mu + h\beta I(n) + h\beta S(n) + h\beta hA\right]}{(1 + h\mu + h\gamma)\left[1 + h\mu + h\beta I(n)\right]}.$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu *Infective* dengan skema beda hingga tak-standar adalah sebagai berikut

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

$$\Leftrightarrow \frac{R(n+1) - R(n)}{h} = \gamma I(n+1) - \mu R(n+1)$$

$$\Leftrightarrow R(n+1) = \frac{R(n) + h\gamma I(n+1)}{1 + h\mu}$$

$$\Leftrightarrow R(n+1) = \frac{R(n) + h\gamma \dfrac{I(n)\left[1 + h\mu + h\beta I(n) + h\beta S(n) + h\beta hA\right]}{(1 + h\mu + h\gamma)\left[1 + h\mu + h\beta I(n)\right]}}{1 + h\mu}$$

$$\Leftrightarrow R(n+1)=\frac{R(n)(1+h\mu+h\gamma)\left[1+h\mu+h\beta I(n)\right]+h\gamma I(n)\left[1+h\mu+h\beta I(n)+h\beta S(n)+h\beta hA\right]}{(1+h\mu)(1+h\mu+h\gamma)\left[1+h\mu+h\beta I(n)\right]}.$$

Jadi model dinamik diskrit *SIR* berupa sistem persamaan beda non linier yang dapat dilihat pada sistem persamaan berikut ini

$$S(n+1)=\frac{S(n)+hA}{1+h\mu+h\beta I(n)}$$

$$I(n+1)=\frac{I(n)\left[1+h\mu+h\beta I(n)+h\beta S(n)+h\beta hA\right]}{(1+h\mu+h\gamma)\left[1+h\mu+h\beta I(n)\right]}$$

$$R(n+1)=\frac{R(n)(1+h\mu+h\gamma)\left[1+h\mu+h\beta I(n)\right]+h\gamma I(n)\left[1+h\mu+h\beta I(n)+h\beta S(n)+h\beta hA\right]}{(1+h\mu)(1+h\mu+h\gamma)\left[1+h\mu+h\beta I(n)\right]}.$$

Misalkan $1+h\mu=\alpha$, $h\beta=\delta$, $h\gamma=\theta$ dan $hA=\varphi$, maka model dinamik diskrit untuk jumlah individu *susceptible*, *infective*, dan *recovered* adalah

$$S(n+1)=\frac{S(n)+\varphi}{\alpha+\delta I(n)}$$

$$I(n+1)=\frac{I(n)\left[\alpha+\delta\left[I(n)+S(n)+\varphi\right]\right]}{(\alpha+\theta)\left[\alpha+\delta I(n)\right]}$$

$$R(n+1)=\frac{R(n)(\alpha+\theta)\left[\alpha+\delta I(n)\right]+\theta I(n)\left[\alpha+\delta\left[I(n)+S(n)+\varphi\right]\right]}{\alpha(\alpha+\theta)\left[\alpha+\delta I(n)\right]},$$

dengan $\alpha>1$ dan φ, θ, $\delta>0$.

3.3 Simulasi Model

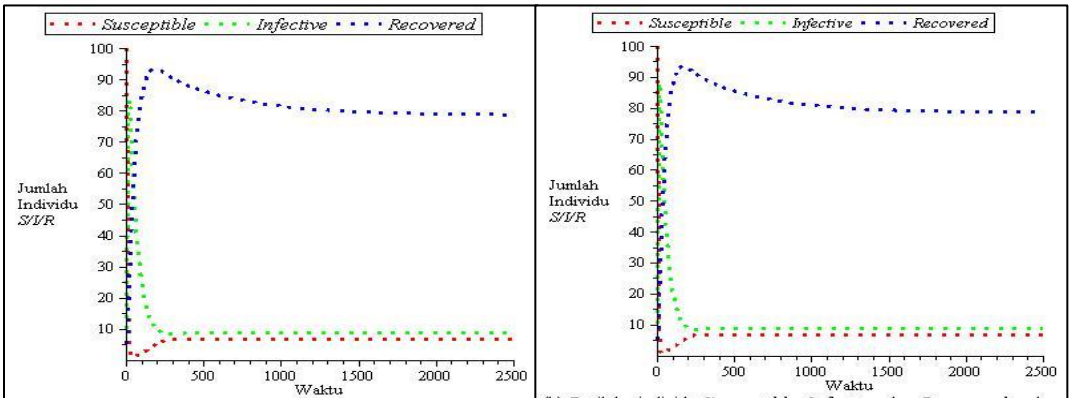
Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi model yaitu $A=0,94$, $\beta=0,015$, $\mu=0,01, \gamma=0,09$, dan $h=0,2;\ 0,5;\ 2;\ 5$. Simulasi dilakukan dengan dua metode, yaitu skema beda hingga tak-standar dan metode Runge-Kutta orde empat. Tabel 2 dan Tabel 3 menunjukkan perilaku model diskrit *SIR* ketika ukuran langkah waktu (*h*) berubah-ubah. Saat *h*=0,2; *h*=0,5; dan *h*=2 , model *SIR* yang didiskritisasi dengan skema beda hingga tak-standar dan metode Runge-Kutta orde empat mampu menjaga sifat kestabilan. Tetapi saat *h*=5, model *SIR* yang didiskritisasi dengan skema beda hingga tak-standar tetap menjaga sifat kestabilan, berbanding terbalik dengan metode Runge-Kutta orde empat, tidak mampu mempertahankan kestabilan. Hal tersebut diperkuat dengan ilustrasi grafik perbandingan skema beda hingga tak-standar dengan skema Runge-Kutta orde empat dengan bantuan *software Maple* 13 sebagai berikut

Tabel 2. Kestabilan model diskrit *SIR* dengan mengubah-ubah ukuran langkah waktu (h) yang didiskritisasi menggunakan skema beda hingga tak-standar

h	**Titik Kesetimbangan** $\left(S^*;I^*;R^*\right)$	**Nilai Eigen**	**Kestabilan**
$0,2$	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,998;0,998;1,25686\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,998;0,98604\pm 0,01745I\right)$	Stabil Asimtotis
$0,5$	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,99502;0,99502;1,62381\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,999502;0,96561\pm 0,04161I\right)$	Stabil Asimtotis
2	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,98039;0,98039;3,18333\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,98039;0,87298\pm 0,13381I\right)$	Stabil Asimtotis
5	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,95238;0,95238;5,36667\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,95238;0,72923\pm 0,23396I\right)$	Stabil Asimtotis

Tabel 3. Kestabilan model diskrit *SIR* dengan mengubah-ubah ukuran langkah waktu (h) yang didiskritisasi menggunakan metode Runge-Kutta orde empat

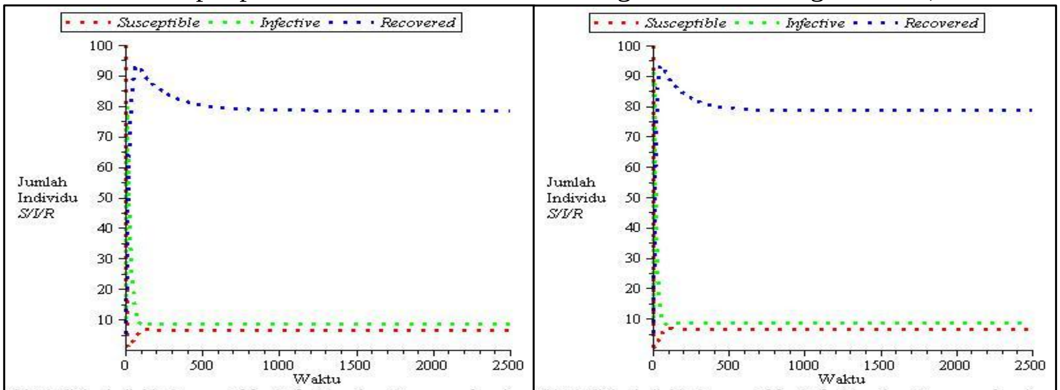
h	**Titik Kesetimbangan** $\left(S^*;I^*;R^*\right)$	**Nilai Eigen**	**Kestabilan**
$0,2$	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,99779;0,99779;1,29003\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,99779;0,98439\pm 0,01996I\right)$	Stabil Asimtotis
$0,5$	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,99352;0,99352;1,84945\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,99352;0,95429\pm 0,05847I\right)$	Stabil Asimtotis
2	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,94;0,94;8,86\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,94;0,577\pm 0,54099I\right)$	Stabil Asimtotis
5	$TE_0=\left(94;0;0\right)$	$\left(0,35625;0,35625;85,33125\right)$	Tidak Stabil
	$TE_E=\left(6,67;8,73;78,6\right)$	$\left(0,35625;-3,53844\pm 5,80438\right)$	Tidak Stabil



(a) Perilaku individu *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered* pada saat h=0,2 dengan skema beda hingga tak-standar

(b) Perilaku individu *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered* pada saat h=0,2 dengan metode Runge-Kutta orde empat

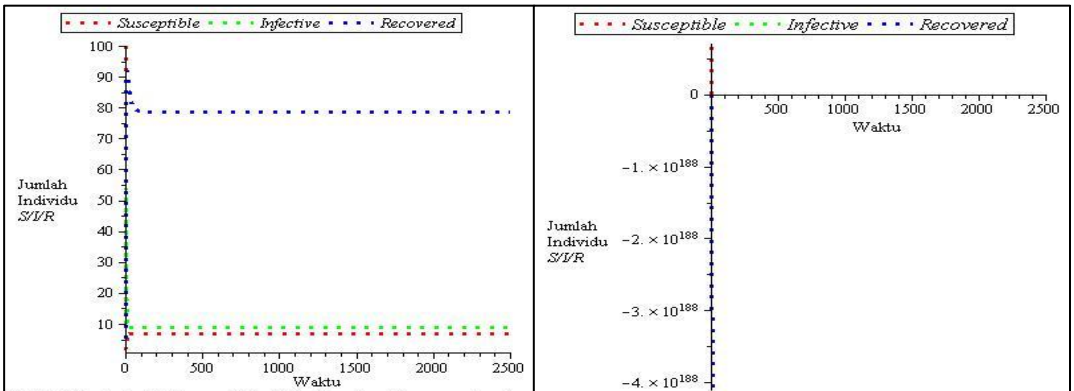
Gambar 2. Perbandingan skema beda hingga tak-standar dan metode Runge Kutta orde empat pada kestabilan titik kesetimbangan endemi dengan $h = 0,2$



(a) Perilaku individu *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered* pada saat h=0,5 dengan skema beda hingga tak-standar

(b) Perilaku individu *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered* pada saat h=0,5 dengan metode Runge-Kutta orde empat

Gambar 3. Perbandingan skema beda hingga tak-standar dan metode Runge Kutta orde empat pada kestabilan titik kesetimbangan endemi dengan $h = 0,5$



(a) Perilaku individu *Susceptible*, *Infective*, dan *Recovered* pada saat h=5 dengan skema beda hingga tak-standar

(b) Perilaku individu Susceptible, Infective, dan Recovered pada saat h=5 dengan metode Runge-Kutta orde empat

Gambar 4. Perbandingan skema beda hingga tak-standar dan metode Runge Kutta orde empat pada kestabilan titik kesetimbangan endemi dengan $h = 5$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, beberapa kesimpulan yang dapat diambil pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Model *SIR* dengan faktor demografi dapat di diskritisasi dengan menggunakan metode skema beda hingga tak-standar menjadi model diskrit *SIR*, yaitu:

$$S(n+1)=\frac{S(n)+\varphi}{\alpha+\delta I(n)}$$

$$I(n+1)=\frac{I(n)\left[\alpha+\delta\left(I(n)+S(n)+\varphi\right)\right]}{(\alpha+\theta)\left(\alpha+\delta I(n)\right)}$$

$$R(n+1)=\frac{R(n)(\alpha+\theta)\left(\alpha+\delta I(n)\right)+\theta I(n)\left[\alpha+\delta\left(I(n)+S(n)+\varphi\right)\right]}{\alpha(\alpha+\theta)\left(\alpha+\delta I(n)\right)},$$

dengan $\alpha=1+h\mu$, $\delta=h\beta$, $\theta=h\gamma$, $\varphi=hA$, $0<\mu<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$, $h>0$, dan $A>0$.

2. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk parameter yang diambil, skema beda hingga tak-standar tetap menjaga sifat kestabilan model diskrit meskipun ukuran langkah berubah-ubah berbanding terbalik dengan Runge- Kutta orde empat yang tidak bisa menjaga sifat kestabilan ketika ukuran langkah waktu berubah. Oleh sebab itu, pada penyelesaian model *SIR* skema beda hingga tak-standar lebih baik daripada metode Runge-Kutta orde empat.

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis mengkaji kestabilan dari model *SIR* yang didiskritisasi menggunakan skema beda hingga tak-standar dan membandingkannya dengan skema Runge-Kutta orde empat, serta parameter ukuran langkah waktu (h) yang digunakan berupa konstanta. Untuk menindaklanjuti penelitian ini, penulis menyarankan agar mengkaji metode lain untuk penyelesaian model *SIR* dan ukuran langkah waktu (h) yang digunakan berupa fungsi dari (h).

DAFTAR PUSTAKA

Ma, Z. dan Li, J., *Dinamical Modeling and Analysis of Epidemics,* World Scientific Publishing, Singapore, 2009.

Mickens, R. E., *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific, USA, 1990.

Sarrayu, E. A., *Penyelesaian Numerik dan Analisis Perilaku Model Epidemik tipe SIR dengan Vaksinasi untuk Pencegahan Penyakit*, ITS, Surabaya, 2010.