

**KONSTRUKSI MATRIKS LESLIE DAN SIFAT-SIFATNYA  
SERTA PENERAPANNYA DALAM PREDIKSI JUMLAH DAN  
LAJU PERTUMBUHAN POPULASI PEREMPUAN  
DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA TAHUN 2025**

**Latifa Auli Marizka**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

**Agung Prabowo\***

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman  
agung.prabowo@unsoed.ac.id

**Agus Sugandha**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jenderal Soedirman

**ABSTRACT.** *The Leslie's matrix is a growth model to predict the number and rate of growth of a population. The Leslie matrix is only used for one gender, that is female. There are several factors computation of the Leslie matrix, that is the age range of the population, the fertility rate, and the survival rate of women. The purpose of this study was to construct the Leslie matrix and its properties and its application in predicting the growth of the female population. Calculation of the prediction of the number and rate of female population growth using Maple13 software. The data used were obtained from the Central Statistics Agency of the Special Region of Yogyakarta, the Ministry of Health of the Republic of Indonesia, and the National Population and Family Planning Agency of the Special Region of Yogyakarta. The research method uses literature study. The results of the application of the Leslie matrix show that the Leslie matrix obtained from data on the number of female population by age group in 2015 and 2020 and data on the number of female baby births based on the age of the mother when giving birth to the Special Region of Yogyakarta in 2015 to 2020 resulted in the number of female population in 2025 amounting to 1,897,672 population and the female population growth rate tends to increase. The female population growth rate in the Special Region of Yogyakarta every five years has increased by 0.013 or 1.3%.*

**Keywords:** *Leslie matrix, eigenvalues, and female population growth.*

**ABSTRAK.** Matriks Leslie merupakan suatu model pertumbuhan yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Matriks Leslie hanya digunakan pada satu jenis kelamin, yaitu perempuan. Terdapat beberapa faktor yang digunakan pada perhitungan dengan matriks Leslie, yaitu rentang umur penduduk, tingkat fertilitas, dan tingkat ketahanan hidup perempuan. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengonstruksi matriks Leslie dan sifat-sifatnya serta penerapannya dalam memprediksi pertumbuhan populasi perempuan. Perhitungan prediksi jumlah dan laju pertumbuhan

populasi perempuan menggunakan *software* Maple13. Data yang digunakan diperoleh dari Badan Pusat Statistik Daerah Istimewa Yogyakarta, Kementerian Kesehatan RI, dan Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional Daerah Istimewa Yogyakarta. Metode penelitian menggunakan studi pustaka. Hasil penerapan matriks Leslie menunjukkan bahwa matriks Leslie yang diperoleh dari data jumlah populasi perempuan menurut kelompok umur pada tahun 2015 dan 2020 dan data jumlah kelahiran bayi perempuan berdasarkan umur ibu saat melahirkan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2015 sampai tahun 2020 menghasilkan yaitu jumlah populasi perempuan tahun 2025 sebesar 1.897.672 penduduk dan laju pertumbuhan penduduk perempuan yang cenderung meningkat. Laju pertumbuhan penduduk perempuan di Daerah Istimewa Yogyakarta setiap lima tahun mengalami peningkatan sebesar 0,013 atau 1,3%.

**Kata Kunci:** Matriks Leslie, nilai eigen, dan pertumbuhan populasi perempuan.

## 1. PENDAHULUAN

Pertumbuhan populasi merupakan perubahan jumlah penduduk, baik peningkatan maupun penurunan. Perempuan merupakan penduduk yang dapat hamil dan melahirkan. Suatu kelahiran dapat menambah populasi penduduk, sehingga perempuan memiliki peran dalam menentukan perkembangan populasi manusia dimasa depan (Maryati dkk., 2021). Namun, penambahan populasi yang tidak terkendali dapat memicu permasalahan dalam kependudukan. Dengan demikian, pengamatan mengenai pertumbuhan populasi perempuan merupakan hal penting yang perlu dilakukan, agar peran perempuan dapat tetap terlaksana serta pemerintah dapat mempertimbangkan kebijakan yang perlu diambil dimasa depan agar kesejahteraan penduduk dapat tetap terjamin.

Matriks Leslie merupakan salah satu model pertumbuhan populasi. Matriks Leslie hanya digunakan pada populasi perempuan. Faktor yang digunakan pada perhitungan dengan matriks Leslie, yaitu rentang umur penduduk, tingkat fertilitas, dan tingkat ketahanan hidup perempuan (Mukhasanah dkk., 2018). Prediksi laju pertumbuhan populasi dapat digunakan nilai eigen dominan yang diperoleh dari nilai-nilai eigen pada matriks Leslie (Pratama dkk., 2013).

Terdapat beberapa penelitian tentang matriks Leslie, yaitu penelitian Pratama dkk. (2013) mengenai aplikasi matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi, penelitian Mukhasanah dkk. (2018) menggunakan matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan perempuan di Jawa Tengah tahun 2020 dan penelitian Maryati dkk. (2021) yang

menggunakan matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan penduduk perempuan di Jawa Barat tahun 2021. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk membahas mengenai konstruksi matriks Leslie dan sifat-sifatnya serta penerapannya dalam prediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2025.

## **2. METODE PENELITIAN**

Penelitian dilakukan menggunakan studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan, yaitu memahami dan mengkaji model matriks Leslie, mengumpulkan data, melakukan konstruksi matriks Leslie, menentukan model pertumbuhan matriks Leslie untuk menghitung prediksi pertumbuhan populasi perempuan pada tahun berikutnya, menentukan sifat-sifat matriks Leslie dengan membuktikan teorema-teorema nilai eigen pada matriks Leslie, dan menerapkan model matriks Leslie pada prediksi pertumbuhan dan laju populasi perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2025. Perhitungan prediksi jumlah populasi dan menentukan nilai eigen untuk mengetahui laju pertumbuhan populasi dilakukan menggunakan bantuan *software* Maple13.

Data yang digunakan diperoleh dari Badan Pusat Statistik Daerah Istimewa Yogyakarta, Kementerian Kesehatan RI, dan Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional Daerah Istimewa Yogyakarta. Data yang digunakan, yaitu data jumlah populasi perempuan menurut kelompok umur pada tahun 2015 dan 2020 dan data jumlah kelahiran bayi perempuan berdasarkan umur ibu saat melahirkan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2015 sampai tahun 2020.

## **3. HASIL DAN PEMBAHASAN**

### **3.1 Konstruksi Matriks Leslie**

Pada matriks Leslie populasi wanita dibagi menjadi beberapa kelompok umur untuk durasi waktu yang sama. Jika batas umur hidup yang dicapai oleh setiap wanita pada suatu populasi adalah  $A$  tahun dan populasi dibagi menjadi  $n$

kelompok umur, maka masing-masing kelompok umur memiliki rentang umur  $A/n$  tahun.

Penentuan kelompok umur dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1.** Penentuan Kelompok Umur

Kelompok Umur	Rentang Umur
1	$\left[0, \frac{A}{n}\right)$
2	$\left[\frac{A}{n}, \frac{2A}{n}\right)$
3	$\left[\frac{2A}{n}, \frac{3A}{n}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$\left[\frac{(n-2)A}{n}, \frac{(n-1)A}{n}\right)$
$n$	$\left[\frac{(n-1)A}{n}, A\right)$

Usia subur seorang perempuan berada pada usia 15-49 tahun. Didefinisikan  $a_i$  sebagai tingkat fertilitas perempuan pada kelompok umur ke- $i$ , yaitu rata-rata banyak anak perempuan yang lahir ketika ibu berada dalam kelompok umur ke- $i$ . Persamaan yang digunakan untuk menentukan nilai  $a_i$  adalah sebagai berikut.

$$a_i = \frac{B_i}{n_i(t)}, \quad (1)$$

dengan

$a_i$  : tingkat fertilitas perempuan,

$B_i$  : jumlah bayi perempuan yang lahir ketika ibu berada dalam kelompok umur ke- $i$ ,

$n_i(t)$  : banyak perempuan dalam kelompok umur ke- $i$  saat waktu ke- $(t)$ .

Selanjutnya, didefinisikan  $b_i$  sebagai tingkat ketahanan hidup penduduk perempuan pada kelompok umur ke- $i$ , yaitu peluang seorang individu yang berusia  $i$  pada waktu  $t$  akan tetap hidup hingga waktu  $t + 1$  dan individu tersebut mencapai usia  $(i + 1)$ . Menghitung nilai  $b_i$  dapat menggunakan persamaan sebagai berikut.

$$b_i = \frac{n_{i+1}(t+1)}{n_i(t)}, \quad (2)$$

dengan

$b_i$  : tingkat ketahanan hidup perempuan

$n_{i+1}(t$  : jumlah perempuan dalam kelompok umur ke- $(i + 1)$  saat waktu  
 $+ 1)$  ke- $(t + 1)$

Setelah nilai tingkat fertilitas ( $a_i$ ) dan tingkat ketahanan hidup ( $b_i$ ) diketahui, langkah berikutnya adalah mengonstruksi matriks Leslie. Diperoleh bentuk matriks Leslie sebagai berikut.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

### 3.2 Model Pertumbuhan Matriks Leslie

Jika  $n(t)$  menyatakan banyaknya populasi perempuan pada waktu  $t$  dan diasumsikan bahwa  $n_1(t)$  adalah jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur pertama,  $n_2(t)$  adalah jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur kedua, dan seterusnya sampai  $n_n(t)$  adalah jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur ke- $n$ , maka jumlah keseluruhan penduduk perempuan pada saat  $t = 0$  adalah sebagai berikut:

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + \dots + n_n(t). \quad (4)$$

Jumlah penduduk perempuan pada setiap kelompok umur saat  $t = 0$  atau  $n(t)$  merupakan suatu vektor kolom yang disebut vektor distribusi umur awal. Berikut vektor kolom dari  $n(t)$ .

$$n(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Selanjutnya, jika  $n(t + 1)$  adalah proyeksi jumlah penduduk perempuan pada waktu  $(t + 1)$  dengan  $n_1(t + 1)$  adalah jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur pertama,  $n_2(t + 1)$  adalah jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur kedua, dan seterusnya sampai  $n_n(t + 1)$  adalah jumlah

penduduk perempuan di kelompok umur ke- $n$ , maka jumlah keseluruhan penduduk perempuan pada waktu  $(t + 1)$  adalah sebagai berikut:

$$n(t + 1) = n_1(t + 1) + n_2(t + 1) + n_3(t + 1) + \dots + n_n(t + 1) \quad (6)$$

Vektor distribusi umur  $n$  pada waktu  $(t + 1)$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$n(t + 1) = \begin{pmatrix} n_1(t + 1) \\ n_2(t + 1) \\ n_3(t + 1) \\ \vdots \\ n_n(t + 1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Pada waktu  $(t + 1)$ , populasi penduduk perempuan pada kelompok umur pertama adalah anak perempuan yang lahir diantara waktu  $t$  dan  $(t + 1)$ . Jumlah keturunan yang dihasilkan oleh setiap kelompok umur dapat dihitung dengan mengalikan tingkat fertilitas dengan jumlah perempuan dalam kelompok umur tersebut. Jumlah dari total keturunan yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$n_1(t + 1) = a_1 n_1(t) + a_2 n_2(t) + a_3 n_3(t) + \dots + a_n n_n(t) \quad (8)$$

Jumlah perempuan pada kelompok umur kedua saat  $(t + 1)$  adalah jumlah perempuan pada kelompok umur pertama pada waktu  $t$  yang dapat bertahan hidup hingga waktu  $(t + 1)$ . Secara matematis, dapat ditulis sebagai berikut:

$$n_2(t + 1) = b_1 n_1(t) \quad (9)$$

Demikian seterusnya sehingga jumlah perempuan pada kelompok umur ke- $n$  pada waktu  $(t + 1)$  adalah jumlah perempuan pada kelompok umur ke- $(n - 1)$  pada waktu  $t$  yang dapat bertahan hidup hingga waktu  $(t + 1)$ . Secara sistematis, dapat ditulis sebagai berikut:

$$n_n(t + 1) = b_{n-1} n_{n-1}(t) \quad (3.10)$$

Sedemikian sehingga diperoleh persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} n_1(t + 1) &= a_1 n_1(t) + a_2 n_2(t) + a_3 n_3(t) + \dots + a_n n_n(t) \\ n_2(t + 1) &= b_1 n_1(t) \\ &\vdots \\ n_n(t + 1) &= b_{n-1} n_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} n_1(t + 1) \\ n_2(t + 1) \\ n_3(t + 1) \\ \vdots \\ n_n(t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_n(t) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$n(t + 1) = \mathbf{L}n(t), \quad (3.12)$$

dengan

$n(t + 1)$  : vektor penduduk perempuan yang berisi prediksi jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur saat  $(t + 1)$ ,

$\mathbf{L}$  : matriks Leslie berukuran  $n \times n$ ,

$n(t)$  : vektor populasi yang berisi jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur saat  $t$ .

Selanjutnya, dari persamaan (12) untuk mengetahui prediksi pertumbuhan penduduk hingga tahun berikutnya, dilakukan beberapa pengembangan.

$$\begin{aligned} n(t + 1) &= \mathbf{L}n(t) \\ n(t + 2) &= \mathbf{L}n(t + 1) = \mathbf{L}(\mathbf{L}n(t)) = \mathbf{L}^2n(t) \\ n(t + 3) &= \mathbf{L}n(t + 2) = \mathbf{L}(\mathbf{L}^2n(t)) = \mathbf{L}^3n(t) \\ &\vdots \\ n(t + p) &= \mathbf{L}n(t + (p - 1)) = \mathbf{L}(\mathbf{L}^{p-1}n(t)) = \mathbf{L}^pn(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Dengan demikian, untuk  $p$  tahun ke depan model pertumbuhan penduduk menggunakan persamaan sebagai berikut.

$$n(t + p) = \mathbf{L}^pn(t), \quad (14)$$

dengan

$n(t + p)$  : vektor populasi yang berisi prediksi populasi di kelompok umur saat  $(t + p)$

### 3.3 Matriks Leslie dan Sifat-sifatnya dalam Memprediksi Laju Pertumbuhan Populasi

Nilai eigen dominan yang diperoleh dari matriks Leslie dapat digunakan untuk menentukan laju pertumbuhan populasi. Persamaan karakteristik matriks Leslie dapat ditulis sebagai berikut.

$$p(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}| = 0, \quad (3.15)$$

dengan

$\lambda$  : nilai eigen

$\mathbf{I}$  : matriks identitas

$\mathbf{L}$  : matriks Leslie

Terdapat beberapa sifat-sifat nilai eigen dalam matriks Leslie yang dinyatakan dalam teorema-teorema sebagai berikut.

**Teorema 4.1** (Anton dan Rorres, 2013: 677) Matriks Leslie  $\mathbf{L}$  memiliki nilai eigen real positif yang tunggal, yaitu  $\lambda_1$  dan vektor eigen, yaitu  $\mathbf{y}$  yang seluruh entrinya adalah positif.

**Teorema 4.2** (Anton dan Rorres, 2013: 677) Jika  $\lambda_1$  adalah suatu nilai eigen positif yang tunggal dari sebuah matriks Leslie  $\mathbf{L}$  dan  $\lambda_k$  adalah sebarang nilai eigen bilangan real atau bilangan kompleks dari matriks Leslie  $\mathbf{L}$ , maka  $|\lambda_k| \leq \lambda_1, k = 2, 3, 4, \dots$

**Teorema 4.3** (Anton dan Rorres, 2013: 677) Jika dua entri yang berturutan  $a_i$  dan  $a_{i+1}$  dalam baris pertama dari matriks Leslie tidak sama dengan nol maka nilai eigen positif dari  $\mathbf{L}$  adalah dominan.

Laju pertumbuhan populasi dapat ditentukan oleh nilai eigen dominan dari suatu matriks Leslie, yaitu

Jika diketahui  $\lambda_1 < 1$ , maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung menurun.

Jika diketahui  $\lambda_1 = 1$ , maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung tetap.

Jika diketahui  $\lambda_1 > 1$ , maka pertumbuhan jumlah populasi akan cenderung meningkat.

### **3.4 Penerapan Matriks Leslie Pada Pertumbuhan Populasi Perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta**

Angka harapan hidup perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta pada tahun 2021 adalah 75,05 tahun, sehingga pada penelitian ini diasumsikan batas umur akhir dari penduduk Daerah Istimewa Yogyakarta adalah 75 tahun dan akan dibagi menjadi 15 kelompok umur. Penentuan kelompok umur pada penduduk perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta adalah sebagai berikut.

**Tabel 2.** Penentuan Kelompok Umur Penduduk Daerah Istimewa Yogyakarta

Kelompok Umur	Rentang Umur
1	[0,5)
2	[5,10)
3	[10,15)
4	[15,20)
5	[20,25)
6	[25,30)
7	[30,35)
8	[35,40)
9	[40,45)
10	[45,50)
11	[50,55)
12	[55,60)
13	[60,65)
14	[65,70)
15	[70,75)

Data yang digunakan adalah data populasi perempuan berdasarkan kelompok umur tahun 2015 dan 2020, dan data kelahiran bayi perempuan berdasarkan umur ibu saat melahirkan tahun 2015 sampai 2020 Daerah Istimewa Yogyakarta. Adapun data yang digunakan dapat dilihat sebagai berikut.

**Tabel 3.** Pengelompokan Perempuan Menurut Umur

Kelompok Umur ke-	Umur	Populasi Perempuan Tahun 2015 ( $n_i(t)$ )	Jumlah Kelahiran	
			Bayi Perempuan Berdasarkan Usia Ibu saat Melahirkan Tahun 2015-2020 ( $B_i$ )	Populasi Perempuan Tahun 2020 ( $n_i(t + 1)$ )
1	0 – 4	134.100	0	118.349
2	5 – 9	129.600	0	121.970
3	10 – 14	127.900	0	125.028
4	15 – 19	130.400	12.665	128.154
5	20 – 24	152.700	50.829	132.104
6	25 – 29	150.500	60.499	133.413
7	30 – 34	137.400	43.268	133.512
8	35 – 39	134.300	24.920	133.719
9	40 – 44	134.300	7.706	135.968
10	45 – 49	133.400	983	131.655
11	50 – 54	122.900	0	127.382
12	55 – 59	102.700	0	114.172
13	60 – 64	78.500	0	97.550
14	65 – 69	61.200	0	77.791
15	70 – 74	50.000	0	59.096

Nilai tingkat fertilitas ( $a_i$ ) dan tingkat ketahanan hidup perempuan ( $b_i$ ) dapat dilihat pada Tabel 4 sebagai berikut.

**Tabel 4.** Tingkat Fertilitas ( $a_i$ ) dan Tingkat Ketahanan Hidup Perempuan ( $b_i$ )

Kelompok Umur ke-	$a_i$	$b_i$
1	0	0,910
2	0	0,965
3	0	1,002
4	0,097	1,013
5	0,333	0,874
6	0,402	0,887
7	0,315	0,973
8	0,186	1,012
9	0,057	0,980
10	0,007	0,955
11	0	0,929
12	0	0,950
13	0	0,991
14	0	0,966
15	0	-

Akan diprediksi jumlah dan laju pertumbuhan populasi Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2025. Dalam penelitian ini rentang waktu yang digunakan adalah 5 tahun, maka untuk tahun 2025 nilai  $p$  yang digunakan adalah  $p = 2$ .

Persamaan yang akan digunakan yaitu

$$n(t + 2) = L^2 n(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,097 & 0,333 & 0,402 & 0,315 & 0,186 & 0,057 & 0,007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,910 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,874 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,887 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,973 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,980 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,955 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,929 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,950 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,966 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 134.100 \\ 129.600 \\ 127.900 \\ 130.400 \\ 152.700 \\ 150.500 \\ 137.400 \\ 134.300 \\ 134.300 \\ 133.400 \\ 122.900 \\ 102.700 \\ 78.500 \\ 61.200 \\ 50.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,097 & 0,337 & 0,351 & 0,279 & 0,181 & 0,058 & 0,007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,088 & 0,303 & 0,366 & 0,287 & 0,169 & 0,052 & 0,006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,878 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,885 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,775 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,863 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,992 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,936 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,887 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,883 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,941 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,957 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 134.100 \\ 129.600 \\ 127.900 \\ 130.400 \\ 152.700 \\ 150.500 \\ 137.400 \\ 134.300 \\ 134.300 \\ 133.400 \\ 122.900 \\ 102.700 \\ 78.500 \\ 61.200 \\ 50.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 185.537 \\ 182.741 \\ 117.740 \\ 125.323 \\ 129.819 \\ 115.404 \\ 118.343 \\ 129.882 \\ 135.339 \\ 133.226 \\ 125.705 \\ 118.326 \\ 108.521 \\ 96.641 \\ 75.125 \end{pmatrix}$$

Jadi, diperoleh jumlah penduduk perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2025 adalah 1.897.672 penduduk.

Selanjutnya, akan diprediksi laju pertumbuhan penduduk. Laju pertumbuhan penduduk diprediksi dengan menghitung nilai eigen dari matriks Leslie **L**. Menggunakan bantuan *software* Maple13 diperoleh nilai eigen dari matriks **L** sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1,012898115, & \lambda_9 &= -0,2818954488 \\ & & & - 0,09594114833i, \\ \lambda_2 &= 0,4587539734 + 0,7358659815i, & \lambda_{10} &= -0,4991770965, \\ \lambda_3 &= 0,4587539734 - 0,7358659815i, & \lambda_{11} &= 0, \\ \lambda_4 &= -0,003735997053 & \lambda_{12} &= 0, \\ & + 0,5860180007i, \\ \lambda_5 &= -0,003735997053 & \lambda_{13} &= 0, \\ & - 0,5860180007i, \\ \lambda_6 &= -0,4299830367 + 0,4671929579i, & \lambda_{14} &= 0, \\ \lambda_7 &= -0,4299830367 - 0,4671929579i, & \lambda_{15} &= 0, \\ \lambda_8 &= -0,2818954488 \\ & + 0,09594114833i, \end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen real positif adalah  $\lambda_1 = 1,012898115 \approx 1,013$ .

Dengan demikian, dari perhitungan nilai eigen diperoleh nilai eigen dominan matriks  $\mathbf{L}$  yaitu  $\lambda_1 = 1,013$ . Nilai eigen  $\lambda_1 = 1,013 > 1$  artinya laju pertumbuhan populasi perempuan di Daerah Istimewa Yogyakarta cenderung meningkat. Setiap lima tahun jumlah populasi perempuan di Daerah Istimewa Yogyakarta mengalami peningkatan sebesar 0,013 atau 1,3%.

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. konstruksi dari matriks Leslie, yaitu:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan yang digunakan dalam perhitungan pertumbuhan populasi perempuan pada tahun ke- $p$ , yaitu sebagai berikut:

$$n(t + p) = \mathbf{L}^p n(t);$$

2. berdasarkan teorema nilai eigen diperoleh sifat-sifat matriks Leslie, yaitu memiliki nilai eigen real positif yang tunggal dan vektor eigen yang seluruh elemennya bilangan positif, nilai eigen  $\lambda_1$  dominan jika  $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ , dan nilai eigen positif dari  $\mathbf{L}$  dominan jika dua entri usia subur berturut  $a_i$  dan  $a_{i+1}$  tidak sama dengan nol;
3. hasil dari simulasi matriks Leslie untuk memprediksi pertumbuhan populasi perempuan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2025 diperoleh, yaitu prediksi jumlah populasi perempuan tahun 2025 sebesar 1.897.672 penduduk dan laju pertumbuhan populasi perempuan cenderung meningkat. Laju pertumbuhan populasi perempuan di Daerah Istimewa Yogyakarta setiap lima tahun mengalami peningkatan sebesar 0,013 atau 1,3%.

Pada pengaplikasian matriks Leslie untuk memprediksi jumlah populasi perempuan diasumsikan hanya terdapat tiga faktor yang digunakan yaitu rentang

umur penduduk, tingkat fertilitas dan tingkat ketahanan hidup. Padahal perpindahan penduduk juga dapat mempengaruhi perubahan jumlah pertumbuhan populasi perempuan. Penulis berharap semoga penelitian selanjutnya dapat memodifikasi matriks Leslie dengan menyertakan perpindahan penduduk.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. dan Rorres, C., *Elementary Linear Algebra.*, 11<sup>th</sup>, Wiley, USA, 2013.
- Badan Pusat Statistik, *Provinsi Daerah Istimwa Yogyakarta Dalam Angka 2022*, Badan Pusat Statistik Provinsi D.I Yogyakarta, Yogyakarta, 2022.
- Maryati, A., Supian, S., dan Subiyanto, *Application of the Leslie Matrix to Predict the Number and Growth Rate of Women in West Java 2021*, International Jurna of Quantitative Research and Modeling, **2**(1) 2021), 11-23.
- Mukhasanah, A. L., Shodiqin, A., dan Aini, A. N., *Penerapan Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Perempuan di Jawa Tengah Pada Tahun 2020*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (3<sup>th</sup> SENATIK), FPMIPATI-Universitas PGRI Semarang, 2020, 91-99.
- Pratama, Y., Prihandono, B., dan Kusumastuti, N., *Aplikasi Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi*, Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapan (Bimaster), **2**(3) (2013), 163-172.

