Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)
Vol. 10 No. 2, Desember 2018, hal. 9-16
ISSN (Cetak) : 2085-1456; ISSN (*Online*) : 2550-0422

PELABELAN TOTAL TAK REGULER PADA BEBERAPA GRAF

Nugroho Arif Sudibyo

STMIK Duta Bangsa
nugroho_arifs@stmikdb.ac.id

Siti Komsatun

STMIK Duta Bangsa

ABSTRACT. *For a simple graph G with vertex set V (G) and edge set E(G), a labeling* $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ *is called a vertex irregular total k- labeling of G if for any two diferent vertices x and y, their weights wt(x) and wt(y) are distinct. The weight wt(x) of a vertex x in G is the sum of its label and the labels of all edges incident with the given vertex x. The total vertex irregularity strength of G, tvs(G), is the smallest positive integer k for which G has a vertex irregular total k-labeling. In this paper, we study the total vertex irregularity strength of some class of graph.*

Keywords*: total vertex irregularity strength.*

ABSTRAK. Misal G adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$, pelabelan $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ disebut pelabelan *k*-total tak reguler titik pada *G*, jika setiap dua titik x dan y, bobot dari $wt(x)$ dan $wt(y)$ berbeda. Bobot $wt(x)$ dari suatu titik x di G adalah jumlah dari label titik x dan label dari garis yang terhubung dengan titik x. Pelabelan *k*-total tak reguler titik, $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil *k* dari *G* yang mempunyai pelabelan *k*-total tak reguler. Pada makalah ini, akan dibahas pelabelan total tak reguler titik dari beberapa kelas graf.

Kata Kunci: pelabelan total tak reguler titik.

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1735, teori graf pertama kali diperkenalkan Leonhard Euler untuk menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg pada sungai Pregel, Rusia. Selanjutnya teori graf berkembang luas dan dapat diterapkan pada kehidupan nyata. Pelabelan graf merupakan suatu topik yang menarik dalam teori graf sehingga berbagai jenis pelabelan diteliti dan dikembangkan (Gallian, 2017).

Hingga saat ini pelabelan graf dapat diaplikasikan pada berbagai bidang antara lain sistem transportasi, sistem komunikasi, navigasi geografis, radar, dan juga sistem keamanan. Sebagai contoh desain dari kode untuk sinyal radar dan peluru kendali ekuivalen dengan pelabelan pada graf lengkap, dimana setiap titik yang ada dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan label titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan.

Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat) pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan asli. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada akhir 1960an oleh Rosa. Selanjutnya, pelabelan yang domainnya berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau keduanya biasanya disebut dengan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan graf yang dibahas, antara lain pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, pelabelan radio, pelabelan anti ajaib, dan masih banyak pelabelan graf yang lain (Gallian, 2017).

Misal G adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$, pelabelan $\phi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ disebut pelabelan k-total tak reguler titik pada G, jika setiap dua titik x dan y, bobot dari $wt(x)$ dan $wt(y)$ berbeda. Bobot $wt(x)$ dari suatu titik x di G adalah jumlah dari label titik x dan label dari garis yang terhubung dengan titik x. Pelabelan k-total tak reguler titik, $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k dari G yang mempunyai pelabelan k-total tak reguler.

Penentuan kekuatan tak regular titik total suatu graf juga bukan hal yang mudah dilakukan. Bača dkk. (2007) telah menghasilkan batas bawah dan batas atas kekuatan tak reguler titik total untuk graf dengan p titik dan q sisi (dinotasikan dengan (p,q)-graph), yang mempunyai derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$ yaitu

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1. \qquad (1)$$

Pada artikel yang sama, Bača dkk. (2007) juga telah menghasilkan kekuatan tak reguler titik total untuk graf bintang, graf lengkap, graf lingkaran dan graf prisma. Nurdin dkk. (2010) menghasilkan kekuatan tak reguler titik total untuk beberapa graf pohon. Wijaya dan Slamin (2008) serta Wijaya dkk. (2005) telah memperoleh kekuatan tak reguler titik total untuk graf roda, graf kipas, graf matahari, graf friendship dan graf bipartit lengkap. Pada makalah ini akan dibahas kekuatan tak reguler titik total untuk graf *ladder rung*, modifikasi graf *caveman* dan graf *double star* dan bagaimana formula pelabelan untuk mendapatkannya.

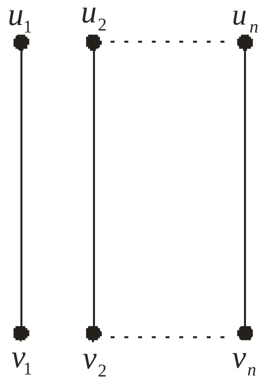
2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kajian ilmu murni yang bersifat studi literatur. Oleh karena itu, pendekatan yang digunakan adalah eksploratif dan adaptasi yaitu memanfaatkan pengetahuan yang penulis miliki dari penelitian-penelitian sebelumnya. Selain itu digunakan juga hasil-hasil penelitian yang telah ada di literatur.

1. Menelusuri pustaka yang berupa buku-buku referensi, jurnal, artikel dan mengkaji konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan graf, pelabelan pada graf dan khususnya pelabelan total tak regular, kemudian mempelajari dan mengkaji beberapa hasil penelitian tentang pelabelan total tak reguler titik.
2. Melakukan penelitian tentang pelabelan total tak reguler titik pada ketiga kelas graf dan menentukan kekuatan tak reguler titik total (*tvs* (*G*)) pada graf-graf tersebut yang hasilnya disajikan dalam bentuk teorema.
3. Membuktikan teorema yang diperoleh di langkah 3. Untuk hal ini, detil langkahnya adalah sebagai berikut:
   a. melakukan simulasi pelabelan total tak reguler titik pada graf tersebut di langkah ke 3 dengan jumlah titik (*n*) tertentu.
   b. menentukan rumus pelabelan total tak regular titik untuk *n* sebarang pada graf tersebut,

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf *ladder rung* L_n berorder *n* adalah graf gabungan dari *n copies* dari graf *path* P_2 (Ball and Coxeter, 1987). Graf *ladder rung* L_n disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf *ladder rung* L_n.

Teorema 1. Diberikan graf *ladder rung* L_n, $n \geq 2$ maka kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah

$$tvs(L_n) = n + 1.$$

Bukti. Graf *ladder rung* L_n merupakan graf yang memiliki $2n$ titik (p) dan setiap titik berdegree 1. Dengan menggunakan Teorema pada Bača dkk. (2007) diperoleh $tvs(L_n) \geq n + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $tvs(L_n) \leq n + 1$. Misalkan himpunan titik $V(L_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan *egde* (garis) $E(L_n) = \{u_i v_i,\ i = 1,2, \dots, n\}$. Pelabelan titik dan pelabelan garis adalah sebagai berikut.

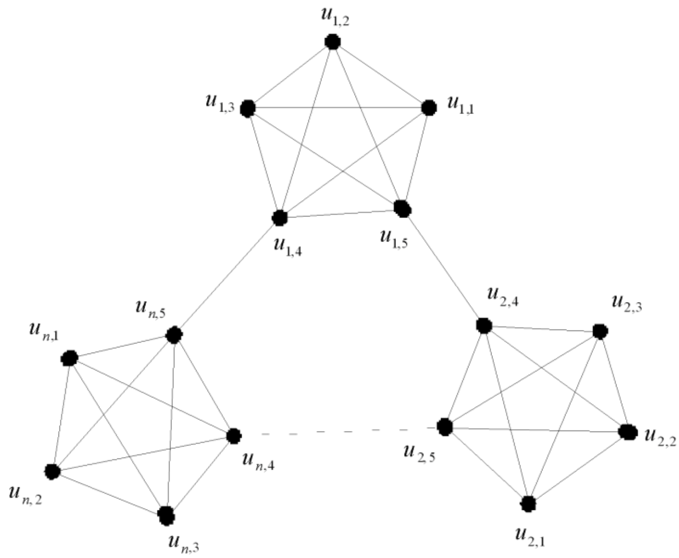
$$\phi(u_i) = i, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n,$$
$$\phi(v_i) = i + 1, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n,$$

dan

$$\phi(u_i v_i) = i + 1, \text{ untuk setiap } i = 1,2, \dots, n.$$

Oleh karena bobot setiap titik berbeda, maka terbukti kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah $tvs(L_n) = n + 1$. □

The graf *caveman* adalah graf yang terbentuk dalam teori jaringan sosial yang dibentuk dengan memodifikasi satu set *k-cliques* terisolasi (*cave*) dengan menghilangkan satu sisi dari setiap *cliques* dan menggunakannya untuk terhubung ke *neighboring cliques* sepanjang *cliques* pusat sedemikian rupa sehingga semua *n cliques* membentuk *loop* tunggal tak terputus (Watts, 1999). Pada makalah ini akan dibahas modifikasi dari graf *caveman* yaitu sebanyak *n copy* graf lengkap K_5 yang dihubungkan dengan suatu *cliques*, seperti yang disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. modifikasi graf *caveman* C_n .

Teorema 2. Diberikan modifikasi graf *caveman* C_n maka kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah

$$tvs(C_n) = n+1.$$

Bukti. Modifikasi graf *caveman* C_n merupakan graf yang memiliki $5n$ titik (p), degree minimumnya adalah 4 (δ) dan degree maksimumnya adalah 5 (Δ). Dengan menggunakan Teorema pada Bača dkk.(2007) diperoleh $tvs(C_n) \geq n+1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $tvs(C_n) \leq n+1$. Misalkan himpunan titik $V(C_n) = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,5}, \dots, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,5}\}$, pelabelan titik dan pelabelan garis adalah sebagai berikut.

$\phi(u_{i,j}) = i$, untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$, dan $j = 1,2,3,4,5$

dan

$\phi(u_{i,j}u_{i,k}) = i$, untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$, dan $1 \leq k \leq n-j+1,\ \ j \neq k$

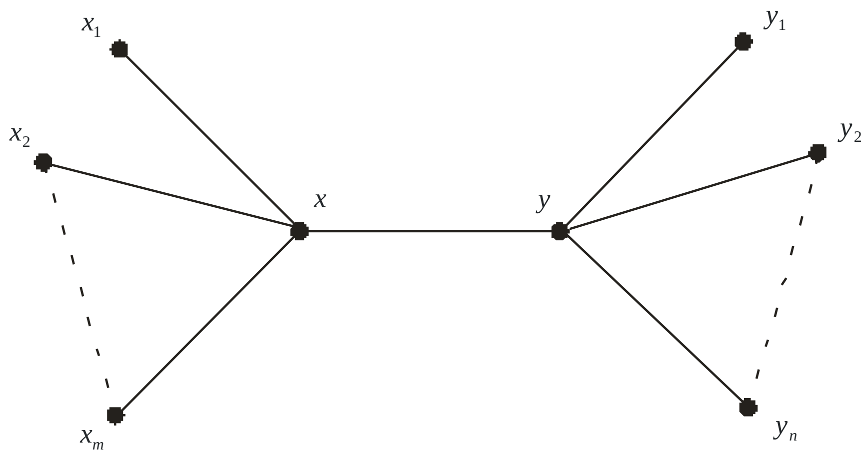
$\phi(u_{i,j}u_{i,k}) = i+1$, untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$, dan $n-j+2 \leq k \leq 5$.

Selanjutnya, pelabelan garis untuk modifikasi graf *caveman* C_n adalah sebagai berikut.

$$\phi(u_{i,5}u_{l,4}) = i, \text{ untuk setiap } i = 1,2,\dots,n, \text{ dan } l = i+1 \bmod n.$$

Oleh karena bobot setiap titik berbeda, maka terbukti kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah $tvs(C_n) = n+1$. □

Graf *double star* $S_{m,n}$ adalah suatu graf dua graf *star* yang mempunyai dua titik sentral x dan y yang *adjacent*. Pada graf *double star* terdapat m daun $x_1, x_2, \dots, x_m$ yang *adjacent* pada x dan n daun $y_1, y_2, \dots, y_n$ yang *adjacent* pada y (Gallian, 2017). Graf *double star* $S_{m,n}$ disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf *double star* $S_{m,n}$.

Teorema 3. Diberikan graf *double star* $S_{m,n}$ dengan jumlah titiknya $n+m$ maka kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah

$$tvs(S_{m,n}) = \left\lceil \frac{n+m+1}{2} \right\rceil.$$

Bukti. Misalkan himpunan titik $V(S_{m,n}) = \{x, x_1, x_2, \dots, x_m, y, y_1, y_2, \dots, y_n\}$, dengan x dan y adalah titik sentral dan himpunan sisi $E(S_{m,n}) = \{e_{x_1}, e_{x_2}, \dots, e_{x_m}, e_{xy}, e_{y_1}, e_{y_2}, \dots, e_{y_m}\}$ dengan e_{xy} adalah garis dari dua titik sentral x dan y.

Kasus pertama, untuk $m = n$.

Pelabelan titik $V(S_{m,n})$ dan pelabelan garis $E(S_{m,n})$ adalah sebagai berikut. Akan dilabeli $\phi(x) = \mathbf{1}$, $\phi(y) = \mathbf{1}$, $\phi(x_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap x_i, $i = 1,2,\ldots,m$, dan $\phi(y_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+i+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap y_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Selain itu, labeli $\phi(\boldsymbol{e}_{x_i}) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{x_i}, $i = 1,2,\ldots,m$, $\phi\left(\boldsymbol{e}_{y_i}\right) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{m+i+1}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{y_i}, $i = 1,2,\ldots,n$, dan $\phi(e_{xy}) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+n+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$.

Kasus kedua untuk $m > n$.

Akan dilabeli $\phi(x) = \mathbf{1}$, $\phi(y) = \mathbf{1}$, $\phi(x_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap x_i, $i = 1,2,\ldots,m-1$, dan $\phi(y_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+i}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap y_i, $i = 1,2,\ldots,n$ dan $\phi(x_m) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+n+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$. Selain itu, labeli $\phi(\boldsymbol{e}_{x_i}) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{x_i}, $i = 1,2,\ldots,m-1$, $\phi\left(\boldsymbol{e}_{y_i}\right) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{m+i}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{y_i}, $i = 1,2,\ldots,n$, dan $\phi(e_{xy}) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+n+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$.

Kasus ketiga untuk $m < n$.

Akan dilabeli $\phi(x) = \mathbf{1}$, $\phi(y) = \mathbf{1}$, $\phi(x_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n+i}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap x_i, $i = 1,2,\ldots,m$, dan $\phi(y_i) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$, untuk setiap y_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$ dan $\phi(y_n) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+n+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$. Selain itu, labeli $\phi(\boldsymbol{e}_{x_i}) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{m+i}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{x_i}, $i = 1,2,\ldots,m$, $\phi\left(\boldsymbol{e}_{y_i}\right) = \left\lceil \frac{\boldsymbol{i+1}}{\mathbf{2}} \right\rceil$, untuk setiap e_{y_i}, $i = 1,2,\ldots,n-1$, dan $\phi(e_{xy}) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{m+n+1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor$.

Oleh karena bobot setiap titik berbeda, maka terbukti kekuatan total tak reguler titik totalnya adalah $tvs(S_{m,n}) = \left\lceil \frac{n+m+1}{2} \right\rceil$. □

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Kekuatan total tak reguler titik total dari graf *ladder rung* adalah $n+1$, graf *caveman* adalah $n+1$ dan graf *double star* adalah $\left\lceil \frac{n+m+1}{2} \right\rceil$.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kemenristek Dikti yang telah mendanai penelitian ini pada tahun 2018.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, M., Jendrol, S., Miller, M., dan Ryan, J., *On irregular total labeling*, Discrete Mathematics, **307** (2007), 1378-1388.

Ball, W. W. R. dan Coxeter, H. S. M., *Mathematical Recreations and Essays, 13th ed.*, Dover, New York, 1987.

Gallian, J.A., *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, The electronic journal of combinatorics, **18** (2017), 1-432.

Nurdin, Baskoro, E. T., Salman, A.N.M., dan Gaos, N.N., *On the total vertex irregularity strength of trees*, Discrete Mathematics, **310** (2010), 3043-3048.

Rosa, A. dan Kotzig, A., *Magic Valuations of Finite Graphs*, Canad. Math. Bull, (1970), 451-461.

Watts, D. J., *Networks, Dynamics, and the Small-World Phenomenon*, Amer. J. Soc., **105** (1999), 493-527.

Wijaya, K. , Slamin, Surahmat, dan Jendrol', S., *Total Vertex Irregular Labelings of Complete Bipartite Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **55** (2005), 129-136.

Wijaya, K. dan Slamin., *Total Vertex Irregular Labelings of Wheels, Fans, Suns and Friendship Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **56** (2008), 103-112.