Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)
FMIPA Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, 21 Desember 2022
Vol. 3 (2022), Hal. 41-50
ISSN (Cetak) : 2550-0384; ISSN (*Online*) : 2550-0392

KETAKSAMAAN HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV DI RUANG MORREY

Idha Sihwaningrum*

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Jenderal Soedirman
idha.sihwaningrum@unsoed.ac.id

ABSTRACT. *Strong and weak type Hardy-Littlewood-Sobolev inequalities are presented in this survey paper for Morrey spaces over Euclidean spaces, Morrey spaces over metric spaces, and Morrey spaces over hypergroups.The Eucidean and metric spaces are equipped with doubling or non doubling measures; meanwhile the doubling measures in hypergroups also satisfy the condition of upper Ahlfors n-reguler by identity*

Keywords. *Doubling measure, Morrey spaces, strong tipe inequality, weak type inequality,*

ABSTRAK. Pada makalah survei ini disajikan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev, baik tipe kuat maupun tipe lemah, di ruang Morrey atas ruang Euclid, atas ruang metrik, dan atas hipergrup. Ukuran yang digunakan pada ruang Euclid dan ruang metrik dapat berupa ukuran *doubling* atau *non-doubling*. Ukuran *doubling* yang digunakan pada hipergrup juga memenuhi kondisi *upper Ahlfors n-reguler* oleh identitas.

Kata Kunci. Ukuran *doubling*, ruang Morrey, ketaksamaan tipe kuat, ketaksamaan tipe lemah.

1. PENDAHULUAN

Pada bidang persamaan diferensial parsial dikenal persamaan Poisson

$$-\Delta u = f.$$

Solusi dari persamaan Poisson di ruang Euclid berdimensi tiga, $\mathbb{R}^3$, mempunyai solusi

$$u(x) = (-\Delta)^{-1} f(x) = C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

(Evans, 1998). Perumuman dari solusi persamaan Poisson di $\mathbb{R}^n$ diberikan oleh

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \quad (1)$$

untuk sembarang bilangan positif α yang kurang dari *n*. Perumuman dari solusi persamaan Poisson dikenal dengan nama potensial Riesz atau operator integral

*Penulis Korespondensi

fraksional. Potensial Riesz merupakan pengembangan dari potensial Newton (Riesz, 1949). Nilai dari integral pada persamaan (1) tidak dapat dihitung secara eksak, tetapi nilai hampirannya dapat dihitung menggunakan metode numerik. Nilai hampiran dijamin ada apabila potential Riesz memenuhi ketaksamaan tipe kuat. Operator yang memenuhi ketaksamaan tipe kuat sering disebut sebagai operator yang terbatas (*bounded*). Selain ketaksamaan tipe kuat untuk potensial Riesz, dikenal juga ketaksaman tipe lemah. Ketaksamaan ini menggambarkan ukuran dari distribusi fungsi yang terlibat pada potensial Riesz. Untuk potensial Riesz, ketaksamaan tipe kuat dan tipe lemah pertama kali dikaji di ruang Lebesgue atas ruang Euclid menggunakan ukuran *doubling* oleh Hardy dan Littlewood (1927; 1932), serta Sobolev (1938).

Teorema 1 *Jika* $0 < \alpha < n,\ 1 < p < q$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, *maka terdapat konstanta* $C_1, C_2 > 0$ *sehingga*

(i) $\|I_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$,

(ii) $\mu(\{x: |I_\alpha| > \gamma\}) \leq C_2 \left(\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{\gamma}\right)^q$ *untuk semua bilangan riil* $\lambda > 0$.

Ketaksamaan (i) disebut ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev tipe kuat untuk potensial Riesz di ruang Lebesgue atas ruang Euclid, sedangkan ketaksamaan (ii) disebut ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev tipe lemah-(1, q) untuk potensial Riesz di ruang Lebesgue atas ruang Euclid. Pada ketaksamaan tersebut, ukuran doubling μ memenuhi

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu\big(B(x, r)\big)$$

untuk sembarang bola dengan pusat x dan jari-jari r, serta suatu konstanta positif C yang tidak bergantung pada r. Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ (untuk $1 \leq p < \infty$) adalah himpunan fungsi dengan norma

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev selanjutnya dikembangkan oleh para peneliti ke berbagai ruang fungsi. Pada makalah ini, ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev akan disajikan untuk ruang fungsi yang dikenal dengan nama ruang Morrey, baik ruang Morrey atas ruang Euclid, ruang Morrey atas ruang metrik, maupun ruang Morrey atas hipergrup.

2. KETAKSAMAAN HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV DI RUANG MORREY ATAS RUANG EUCLID

Fungsi-fungsi yang berada di ruang Lebesgue atas ruang Euclid hanya fungsi-fungsi yang menghilang di tak hingga. Perumuman dari ruang Lebesgue atas ruang Euclid yang memuat fungsi yang terintegralkan secara lokal dan menghilang di tak hingga adalah ruang Morrey atas ruang Euclid $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$. Pada ruang ini, norma fungsi memenuhi

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(x,r)} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Ruang Morrey, yang diperkenalkan oleh Morrey (1940), mengakomodasi sifat global fungsi yang tidak diakomodasi oleh ruang Lebesgue. Dari norma fungsi pada ruang Morrey, tampak bahwa ruang Lebesgue merupakan kasus khusus dari ruang Morrey. Ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev ke ruang Morrey atas ruang Euclid dengan ukuran *doubling* dapat dilihat pada (Peetre, 1969; Adams, 1975; **Chiarenza and Frasca**, 1987; Eridani, dkk., 2009); sedangkan ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev di ruang Morrey yang diperumum atas ruang Euclid dengan ukuran *doubling* dapat dilihat pada (Nakai, 1994; Kurata, dkk., 2002). Salah satu ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev tipe kuat di ruang Morrey diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2. (Adams, 1975) *Untuk* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ dan $0 \leq \lambda < n - \alpha p$, *Riesz potensial* I_α *terbatas dari* $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *ke* $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *yaitu operator Riesz memenuhi ketaksamaan*

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)},$$

apabila $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\alpha}$.

Hasil Adams (1975) ini lebih kuat dibandingkan dengan hasil Spanne pada (Peetre, 1969), yaitu potensial Riesz I_α terbatas dari ruang Lebesgue $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{q,\lambda q/p}(\mathbb{R}^n)$ apabila $1 < p < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, dan $0 \le \lambda < n$. Bukti dari Spanne melibatkan ketaksamaan tipe kuat dari potensial Riesz I_α di ruang Lebesgue, sedangkan bukti dari Adams melibatkan ketaksamaan tipe kuat dari operator maksimal di ruang Morrey. Hasil Adams diaplikasikan oleh Olsen (1995) dalam kajiannya mengenai operator Schrödinger yang diperturbasi.

Dengan diperkenalkannya ukuran *non-doubling*

$$\mu\big(B(x,r)\big) \le Cr^d$$

(untuk $0 < d \le n$) oleh Nazarov, dkk. (1998), serta Tolsa (1998), sejumlah peneliti termotivasi untuk menyelidiki keberlakuan dari ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev di ruang yang dilengkapi dengan ukuran *non-doubling*. Dengan memodifikasi definisi dari potensial Riesz menjadi

$$I_\alpha^d f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\, d\mu(y), \quad 0 < \alpha < d \le n,$$

Garcia-Cuerva dan Martell (2001) membuktikan keberlakuan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev (tipe lemah maupun tipe kuat) di ruang Lebesgue atas ruang Euclid dengan ukuran *non-doubling*. Hasil dari Garcia-Cuerva dan Martell (2001) mendasari ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev di ruang Morrey maupun ruang Morrey yang diperumum atas ruang Euclid untuk ukuran *non-doubling*, yang dapat dilihat antara lain pada (Hakim dan Gunawan, 2013; Gunawan, dkk., 2009; Sawano, 2008; Sawano dan Tanaka, 2006; Sawano, dkk., 2006; Sawano dan Shimomura, 2013; Sihwaningrum, dkk., 2010; Sihwaningrum, dkk., 2012).

3. KETAKSAMAAN HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV DI RUANG MORREY ATAS RUANG METRIK

Ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Littelwood-Sobolev ke ruang metrik didasarkan pada fakta bahwa ruang Euclid yang dilengkapi dengan metrik tertentu hanya merupakan salah satu contoh dari ruang metrik. Dengan mendefiniskan potensial Riesz sebagai

$$I_\alpha^* f(x) := \int_X \frac{f(y)}{\rho(x,y)^{d-\alpha}}\, d\mu(y), \quad 0 < \alpha < d \leq n,$$

Garcia-Cuerva and Gatto (2004) membuktikan keberlakuan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev (tipe lemah dan tipe kuat) di ruang Lebesgue atas ruang metrik dengan ukuran *non-doubling*. Esktensi dari hasil Garcia-Cuerva and Gatto (2004) di ruang Morrey dan ruang Morrey yang diperumum atas ruang metrik dengan ukuran *non-doubling* diberikan antara lain dalam (Gunawan, dkk., 2013; Sihwaningrum dan Sawano, 2013; Sihwaningrum, dkk., 2015; Sihwaningrum, 2016; Sihwaningrum dan Gunawan, 2016; Sihwaningrum, dkk., 2018). Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev tipe lemah-(p, q) di ruang Morrey disajikan pada teorema berikut.

Teorema 3 (Sihwaningrum, 2016) *Misalkan* $0 < \alpha < d, 1 \leq p \leq q < \infty$ *and* $0 \leq \lambda < 1 - \frac{\alpha p}{d}$. *Jika* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d(1-\lambda)}$, *maka*

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |I_\alpha^* f(x)| > \gamma\}) \leq C r^{n\lambda} \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mu)}}{\gamma} \right)^q .$$

4. KETAKSAMAAN HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV DI RUANG MORREY ATAS HIPERGRUP

Ruang kuasi metrik yang dilengkapi dengan sifat-sifat tertentu merupakan hipergrup. Dengan mendefinisikan potensial Riesz sebagai

$$R_\alpha f(x) := \int_K \frac{T^x f(y^\sim)}{\rho(e,r)^{n-\alpha}}\, d\mu(y),$$

Hajibayov (2015) membuktikan bahwa ketaksamaan Hardy-Littlewoood-Sobolev berlaku di ruang Lebesgue atas hipergrup komutatif. Di ruang Morrey atas hipergrup $L^{p,\lambda}(K)$, dengan

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(K)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{\left(\mu\left(B(e,2r)\right)\right)^{\frac{\lambda}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(x)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} < \infty,$$

diperoleh hasil berikut.

Teorema 4 (Sihwaningrum, dkk., 2020b) *Jika diberikan* $0 < \lambda < n, 1 < p < \frac{n}{\alpha}$, *dan* $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$, *maka diperoleh*

$$\mu(\{x \in B(e,r) : |R_\alpha f(x)| > \gamma\}) \leq C \left(\frac{r^{\lambda/q} \|f\|_{L^{p,\lambda}(K)}}{\gamma} \right)^q.$$

Teorema 5 (Sihwaningrum, dkk., 2020b) *Misalkan* $0 < \lambda < n, 0 < \theta < n$, *dan* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. *Misalkan juga ukuran* μ *adalah ukuran upper Ahlfors n-reguler oleh identitas. Jika* $\frac{\theta}{q} = \frac{\lambda}{p}$ *dan* $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$, *maka potensial Riesz terbatas dari ruang Morrey* $L^{p,\lambda}(K)$ *ke ruang Morrey* $L^{q,\theta}(K)$.

Keterbatasan (ketaksamaan tipe kuat Hardy-Littewood-Sobolev) dari potensial Riesz pada Teorema 5 mengacu pada (Petree, 1969). Hasil lain yang mengacu pada (Adams, 1975) disajikan pada (Sihwaningrum, dkk., 2020a).

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Ekstensi dari ketaksamaan Hardy-Litllewood-Sobolev di ruang Morrey atas ruang metrik maupun di ruang Morrey atas hipergrup selalu mengacu pada hasil Spanne dalam (Petree, 1969) atau Adams (1975). Pembuktian ketaksamaan yang mengacu pada hasil Spanne lebih sederhana daripada pembuktian ketaksamaan yang mengacu pada hasil Adams. Selain memerlukan hasil ketaksamaan tipe kuat (atau lemah) dari operator maksimal di ruang Morrey, ketaksamaan yang mengacu pada hasil Adams juga memerlukan ketaksamaan Hedberg. Hasil penelitian mengenai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev di ruang Morrey atas hipergrup masih dapat dikembangkan ke ruang Morrey yang diperumum atas hipergrup.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Jenderal Soedirman yang telah mendanai penelitian penulis via Riset Dasar Unsoed dengan nomor kontrak T/642/UN23.18/PT.01.03/2022.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, D. R., *A Note on Riesz Potential*, Duke Math. J., **42** (1975), 765–778.

Chiarenza, F. dan Frasca, M., *Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function*, Rend. Mat., **7** (1987), 273–279.

Eridani, Kokilashvili, V., dan Meskhi, A., *Morrey Spaces and Fractional Integral Operators*, Expositiones Mathematicae, **27** (3) (2009), 227 – 239.

Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Maths, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998

Garcia-Cuerva, J. dan Gatto, A.E., *Boundedness Properties of Fractional Integrals Associated to Non-Doubling Measures*, Studia Math**, 162**(3) (2004), 245–261.

Garcia-Cuerva, J. dan Martell, J.M., *Two Weight Norm Inequalities for Maximal Operators and Fractional Integrals on Non-homogeneous Spaces*, Indiana Univ. Math. J., **50** (2001), 1241–1280.

Gunawan, H., Sawano, Y., dan Sihwaningrum, I., *Fractional Integral Operators in Nonhomogeneous Spaces*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **80** (2) (2009), 324-334.

Gunawan, H., Hakim, D.I., Sawano, Y., dan Sihwaningrum, I., *Weak Type Inequalities for Some Integral Operators on Generalized Nonhomogeneous Morrey Spaces*, Journal of Function Spaces and Applications, (2013) Article ID 809704, 12 pages.

Hajibayov, M.G., *Boundedness in Lebesgue spaces of Riesz potentials on Commutative Hypergroups*, Global Journal of Mathematical Analysis, **3**(1) (2015), 18 – 25.

Hakim, D.I. dan Gunawan, H., *Weak* (*p*, *q*) *inequalities for fractional integral operators on generalized Morrey spaces of Non-homogeneous Type*, Math. Aeterna, **3**(3) (2013), 161–168.

Hardy, G. H. dan Littlewood, J. E., *Some Properties of Fractional Integral I*, Math. Zeit, **27** (1927), 565–606.

Hardy, G. H. dan Littlewood, J. E., *Some Properties of Fractional Integral II*, Math. Zeit, **34** (1932), 403–439.

Kurata, K., Nishigaki, S., dan Sugano, S., *Boundedness of Integral Operators on Generalized Morrey Spaces and Its Application to Schr¨odinger Operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2002), 389–401.

Morrey, C. B., *Functions of several variables and absolute continuity,* Duke Math. J., **6** (1940), 187–215.

Nakai, E., *Hardy-Littlewood Maximal Operator*, *Singular Integral Operators, and the Riesz Potentials on Generalized Morrey Spaces*, Math. Nachr., **166** (1994), 95–103.

Nazarov, F., Treil, S. dan Volberg, A., *Weak Type Estimates and Cotlar Inequalities for Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Space,* Internat. Math. Res. Notices, **9** (1998), 463–487.

Olsen, P.A., *Fractional Integration, Morrey Spaces and a Schrödinger Equation*, Comm. Partial Differential Equations, **20** (1995), 2005–2055.

Peetre, J., *On the Theory of Lp;λ Spaces*, Journal of Functional Analysis, **4** (1969), 71–87.

Riesz, M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le Problème de Cauchy*, Acta Mathematica, **81** (1949) 1–22.

Sawano, Y., *Generalized Morrey Spaces for Non-Doubling Measures,* Nonlinear Differential Equations and Applications, **15** (2008), 413–425.

Sawano, Y. dan Tanaka, H., *Morrey Space for Non-Doubling Measures,* Acta Mathematica Sinica, **1** (2006), 153–172

Sawano, Y., Sobukawa, T., dan Tanaka, H., *Limiting Case of the Boundedness of Fractional Integral Operators on Nonhomogeneous Spaces*, Journal of Inequalities and Applications, **2006** (2006), Article ID 92470, 1–16 .

Sawano, Y. dan Shimomura, T., *Sobolev's Inequality for Riesz Potentials of Functions in Generalized Morrey Spaces with Variable Exponent Attaining the Value 1 over Non-doubling Measure Spaces*, J. Inequal. Appl., **2013** (20013) , 1–19.

Sihwaningrum, I., Suryawan, H.P. dan Gunawan, H., *Fractional Integral Operators and Olsen Inequalities on Non-Homogeneous Spaces*, Aust. J. Mah. Anal. Appl., **7**(1) (2010), Article 14, 6pp.

Sihwaningrum, I., Maryani, S. dan Gunawan H., *Weak Type Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Non-homogeneous Morrey Spaces*, Anal. Theory Appl., **28**(1) (2012), 65–72.

Sihwaningrum, I. dan Sawano, Y., *Weak and Strong Type Estimates for Fractional Integral Operator on Morrey Spaces over Metric Measure Spaces*, Eurasian Math. J., **4**(1) (2013), 76–81.

Sihwaningrum, I., Wardayani, A., dan Gunawan, H., *Weak Type Inequalities for Some Operators on Generalized Morrey Spaces Over Metric Measure Spaces*, Austral. J. Math. Anal. Appl.**, 12**(1) (2015), Art. 16, 9 pp.

Sihwaningrum, I., *A Weak-(p; q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey Spaces Over Metric Measure Spaces*, Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika, **8**(1) (2016), 1–7

Sihwaningrum, I., dan Gunawan, H., *A Weak-(p, q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey Spaces via Hedberg Type Inequality*, Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika, **8**(2) (2016), 103–108.

Sihwaningrum, I., Gunawan, H. dan Nakai, E., 2018, *Maximal and Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces over Metric Measure Spaces*, Mathematishe Narchrichten, **219** (2018) 1400–1417

Sihwaningrum, I., Wardayani, A., dan Dasril, Y., *An Adams Type Inequality of Fractional Integral Operator on Hypergroups*, J. Phys.: Conf. Ser., **1494** (2020a), 012019

Sihwaningrum, I., Maryani, S., dan Gunawan, H., *Extension of Hardy-Littlewood-Sobolev Inequalities for Riesz Potentials on Hypergroups*, Mediterr. J. Math., **17** (2020b), 203.

Sobolev, S.L., *On A Theorem in Fuctional Analysis (Russian)*, Mat. Sob., **46** (1938), 471–497. [English tanslation in Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2, **34** (1963), 39–68].

Tolsa, X., *Cotlar Inequality without the Doubling Condition and Existence of Principal Values the Cauchy Integral of Measures*, J. Reine Angew. Math., **502** (1998), 199–235.