Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)
FMIPA Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, 21 Desember 2022
Vol. 3 (2022), Hal. 51-64
ISSN (Cetak) : 2550-0384; ISSN (*Online*) : 2550-0392

SPEKTRUM *LAPLACE* PADA GRAF BIPARTIT LENGKAP ($\boldsymbol{K_{n,n}}$)

Resa Oktriyansa

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
resa.oktriyansa@mhs.unsoed.ac.id

Triyani*

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
trianisr@yahoo.com.au

Siti Rahmah Nurshiami

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
siti.nurshiami@unsoed.ac.id

ABSTRACT. *Graph theory is a branch of mathematics that is widely applied to solve various problems in everyday life. One study of graph theory is graph spectra. The graph spectrum is the arrangement of the eigenvalues of the neighboring matrices and their multiplicity. The purpose of this study is to determine the general form of the characteristic polynomial and the general form of the spectrum in a complete bipartite graph* $(K_{n,n})$ *for* $n > 1$ *using the Laplace matrix. The spectrum resulting from the Laplace matrix is called the Laplace spectrum. Determination of the Laplace spectrum in this study is by determining the characteristic polynomial of the Laplace matrix of a complete bipartite graph* $(K_{n,n})$ *for* $n > 1$*. The Laplace matrix of a graph is the difference between the diagonal matrix and the neighboring matrix of the graph. The results of this study obtained the general form of the Laplace matrix characteristic polynomial from a complete bipartite graph* $(K_{n,n})$ *for* $n > 1$*, is* $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)}$*. Furthermore, from the characteristic polynomial, the general form of the Laplace spectrum is obtained from a complete bipartite graph* $(K_{n,n})$ *for* $n > 1$*, is*

$$spec_L\, K_{n,n} = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Keywords: *complete bipartite graph, Laplace matrix, characteristic polynomial, Spectrum.*

ABSTRAK. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak diterapkan untuk menyelesaikan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu kajian dari teori graf adalah spektrum graf. Spektrum graf adalah susunan nilai eigen dari matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya. Tujuan penelitian ini untuk menentukan bentuk umum polinomial karakteristik dan bentuk umum spektrum pada graf bipartit lengkap $(\boldsymbol{K_{n,n}})$ dengan $n > 1$ menggunakan matriks *Laplace*. Spektrum yang dihasilkan dari matriks *Laplace* dinamakan spektrum *Laplace*. Penentuan spektrum *Laplace* pada penelitian ini yaitu dengan menentukan polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(\boldsymbol{K_{n,n}})$ dengan $n > 1$. Matriks *Laplace* dari suatu graf

*Penulis Korespondensi

merupakan selisih matriks diagonal dan matriks ketetanggaan dari graf tersebut. Hasil dari penelitian ini diperoleh bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}})$ dengan $n > 1$, yaitu $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)}$. Selanjutnya, dari polinomial karakteristik tersebut diperoleh bentuk umum spektrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}})$ dengan > 1 , yaitu

$$spec_L\, K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Kata kunci: graf bipartit lengkap, matriks *Laplace*, polinomial karakteristik, Spektrum.

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak diterapkan untuk menyelesaikan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh persoalan yang menggunakan graf yaitu jaringan lalu lintas, dimana suatu kota dihubungkan dengan kota lain apabila terdapat jalan atau sarana transportasi yang menghubungkan kota tersebut. Secara umum, graf dapat digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut.

Teori graf ini pertama kali digunakan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan bernama Leonhard Euler, yang berhasil mengungkapkan masalah tujuh jembatan Konigsberg. Masalah tersebut diselesaikan dengan cara merepresentasikan ke dalam graf. Daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai simpul dan jembatan dinyatakan sebagai sisi. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul *(vertices)* dan $E(G)$ adalah himpunan dari sisi *(edges)* yang menghubungkan sepasang simpul. Berdasarkan banyaknya sisi yang bersisian dengan suatu simpul pada graf G, graf yang setiap simpulnya mempunyai jumlah derajat yang sama disebut graf reguler. Apabila derajat simpulnya sebanyak r, maka graf tersebut disebut graf reguler derajat r (Munir, 2010: 378). Graf bipartit lengkap $(K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}})$ merupakan salah satu graf reguler khusus karena memiliki jumlah derajat yang sama pada setiap simpulnya.

Salah satu kajian dari teori graf adalah spektrum graf. Menurut Biggs (1993: 8), spektrum dari graf G adalah susunan nilai eigen dari matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya. Insani dan Waryanto (2012), telah mengkaji spektrum graf pada penerapan teori graf yaitu analisi jejaring sosial dengan menggunakan Microsoft Nodexl; Orden, dkk (2017), telah mengkaji pengaplikasian spektrum graf pada pewarnaan spektrum graf untuk penetapan saluran Wi-Fi.

Selain dengan matriks ketetanggaan graf, spektrum graf dapat diperoleh dari matriks *Laplace* dan matriks sirkulan. Matriks *Laplace* merupakan matriks bujur sangkar yang diperoleh dari selisih matriks diagonal dengan matriks ketetanggaan dari graf G. Spektrum suatu graf yang diperoleh dari matriks *Laplace,* maka disebut sebagai spektrum *Laplace.* Matriks sirkulan merupakan matriks yang berukuran $n \times n$ yang dibentuk oleh n vektor dengan mengubah urutan yang hanya memiliki satu input pada baris pertama yang setiap entri bergeser satu posisi kekanan pada baris berikutnya.

Peneliti sebelumnya yang telah mengkaji tentang spektrum graf bipartit lengkap $(K_{\boldsymbol{n,n}})$ yaitu Herianti (2016) mengkaji spektrum graf bipartit lengkap dengan matriks sirkulan. Pada penelitian selanjutnya, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian yang dilakukan oleh Herianti dengan graf yang sama yaitu graf bipartit lengkap $(K_{\boldsymbol{n,n}})$ tetapi menggunakan matriks yang berbeda, karena meskipun graf yang sama belum tentu memiliki pola spektrum untuk matriks yang berbeda. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji spektrum *Laplace* pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mencari dan mempelajari beberapa informasi dari berbagai pustaka seperti buku, jurnal, dan literatur lainnya yang berhubungan dengan materi untuk menentukan spektrum *Laplace*. Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji spektrum *Laplace* pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan menggunakan matriks *Laplace*, dimana untuk menentukan matriks *Laplace* harus diketahui terlebih dahulu matriks diagonal dan matriks ketetanggaan dari graf tersebut. Kemudian, menentukan matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$, polinomial karakteristik matriks *Laplace* pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ serta menentukan spektrum *Laplace* pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Spektrum dari suatu graf G adalah himpunan bilangan yang merupakan susunan nilai eigen dari matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya yang dilambangkan dengan $Spec\ (G)$. Spektrum yang dihasilkan dari matriks *Laplace* dinamakan spektrum *Laplace*, dimana untuk menentukan matriks *Laplace* harus diketahui terlebih dahulu matriks diagonal dan matriks ketetanggaan. Kemudian, menentukan polinomial karakteristik matriks *Laplace* pada graf tersebut.

3.1 Bentuk Umum Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* pada Graf Bipartit Lengkap $(K_{n,n})$

Polinomial karakteristik diperoleh dengan cara menyelesaikan $\det(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})) = 0$ dengan eliminasi Gaussian. Selanjutnya, dari hasil polinomial karakteristik yang diperoleh dapat dihasilkan nilai eigen beserta multiplitasnya, serta dapat ditentukan pola untuk bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$.

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ untuk $1 \leq n \leq 4$ dengan cara eliminasi Gaussian serta memperhatikan sifat-sifat determinan diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3.1 Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* Graf Bipartit Lengkap $(K_{n,n})$

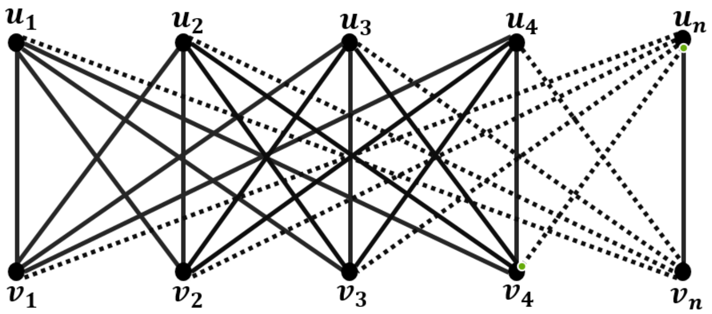
Graf Bipartit Lengkap $(K_{n,n})$	**Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace***
$K_{1,1}$	$\lambda(\lambda - 2)$
$K_{2,2}$	$\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$
$K_{3,3}$	$\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 3)^4$
$K_{4,4}$	$\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 4)^6$

Dilihat dari Tabel 3.1, diperoleh pola bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ sebagai berikut.

Teorema 3.1 Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap dengan $n > 1$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)}.$$

Bukti. Graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Bipartit Lengkap $(K_{n,n})$

Berdasarkan pada Gambar 3.1, diperolah matriks diagonal dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ berukuran $(2n)x(2n)$, dengan $2n$ menyatakan banyaknya simpul pada graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$.

Matriks diagonal dimisalkan $D(K_{n,n}) = [n_{ij}]$ dengan

$$n_{ij} = \begin{cases} n, & i = j \text{ dengan } i,j = 1,2,3,\dots,2n \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases},$$

sehingga

$$D(K_{n,n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Matriks ketetanggaan dimisalkan $A(K_{n,n}) = [m_{ij}]$, dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & i = s\,; j = n+t \text{ dengan } s,t = 1,2,\dots,n \\ & i = n+t; j = s \text{ dengan } s,t = 1,2,\dots,n\ , \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

sehingga

$$A(K_{n,n}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, diperoleh matriks *Laplace* yang berukuran $(2n) \times (2n)$, yang merupakan selisih matriks diagonal dengan matriks ketetanggaan. Dimisalkan matriks *Laplace* ini sebagai $L(K_{n,n}) = [l_{ij}]$ dengan

$$l_{ij} = \begin{cases} n, & i = j \\ -1, & i = s\,; j = n+t \text{ dengan } s,t = 1,2,\dots,n \\ & i = n+t; j = s \text{ dengan } s,t = 1,2,\dots,n\,' \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

sehingga

$$L(K_{n,n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & n & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dicari polinomial karakteristik menggunakan eliminasi Gaussian untuk mereduksi matriks $\det\left(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})\right) = 0$ menjadi matriks segitiga atas dengan memperhatikan sifat-sifat determinan. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

$$\det(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda-n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-n \end{vmatrix} = 0.$$

1. Langkah ke-1, tukarkan baris ke-1 dengan baris ke-(n+1),sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$(-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda-n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-n \end{bmatrix}$$

$= 0;$

2. Langkah ke-2, tukarkan baris ke-(n+i) dengan baris ke-(n+(i+1)) dengan i=1,2,3,…,n-1, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda-n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-n \\ \lambda-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0;$

3. Langkah ke-3, kurangkan baris ke-(n+i) dengan baris ke-1 dengan i=1,2,3,…,n-1, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & 0 & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & 0 & 0 & \lambda-n \\ \lambda-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0;$

4. Langkah ke-4, kurangkan baris ke-(n+(i+1)) dengan baris ke-(n+i) dengan i=1,2,3,…,n-1, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ \lambda-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0;$

5. Langkah ke-5, kurangkan baris ke-2n dengan $(\lambda - n)$ dikali baris ke-1, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ 0 & -\lambda+n & -\lambda+n & -\lambda+n & \cdots & 1-(\lambda-n)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0;$

6. Langkah ke-6, Tambahkan baris ke-2n dengan baris ke i+1 dengan i=1,2,3,…,n, sehingga diperoleh matriks sebahai berikut:

$$(-)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-(\lambda-n)^2 & n & n & n \end{vmatrix}$$

$= 0;$

7. Langkah ke-7 :
   - Kalikan $\frac{1}{n-(\lambda-n)^2}$ dikali baris ke-2n;
   - Kurangkan baris ke-2n dengan $\frac{1}{-\lambda+n}$ dikali baris ke-(n+1);
   - Kalikan $\frac{n-(\lambda-n)^2}{2n-(\lambda-n)^2}$ dikali baris ke-2n;
   - Kurangkan baris ke-2n dengan $\frac{1}{-\lambda+n}$ dikali baris ke-(n+2),

$$\vdots$$

   - Kalikan $\frac{(n-2)n-(\lambda-n)^2}{(n-1)n-(\lambda-n)^2}$ dikali baris ke-2n;
   - Kurangkan baris ke-2n dengan $\frac{1}{-\lambda+n}$ dikali baris ke-(2n-3);

   Dengan tetap memperhatikan sifat-sifat determinan sehingga diperoleh hasil dari langkah ke-7 sebagai berikut :

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)n-(\lambda-n)^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{(-\lambda^2+2n\lambda)}{(n-1)n-(\lambda-n)^2} \end{vmatrix}$$

$= 0;$

8. Langkah ke-8, kalikan $((n-1)n-(\lambda-n)^2)$ dengan baris ke-2n, sehingga diperoleh hasil akhir matriks segitiga atas sebagai berikut:

$$(-1)^n \frac{(n-1)n-(\lambda-n)^2}{(n-1)n-(\lambda-n)^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (-\lambda^2+2n\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-n & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-n & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda+n & \lambda-n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+n & \lambda-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+n & \lambda-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (-\lambda^2+2n\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Setelah matriks segitiga atas diperolah, polinomial karakteristik matriks $\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})$ dihasilkan dari $\det(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})) = 0$ yang merupakan perkalian elemen diagonal utama pada matriks segitiga atas, sehingga diperolah polinomial karakteristik yaitu

$$\Leftrightarrow (-)^n \det(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-)^n(1)(\lambda-n)\ldots(-\lambda+n)\ldots(-\lambda^2+2n\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-)^n(1)(\lambda-n)^{(n-1)}(-\lambda+n)^{n-1}(-)(\lambda^2-2n\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-)^n(1)(\lambda-n)^{(n-1)}(-)^{n-1}(\lambda-n)^{n-1}(-)(\lambda^2-2n\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2(n-1)} = 0$$

Jadi, terbukti benar bahwa polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2(n-1)}.$$

Setelah bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ diketahui, maka dapat diperoleh spektrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ sebagai berikut:

Tabel 3.2 Spektrum *Laplace* pada graf bipartit lengkap *($K_{n,n}$)*

Graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$	Spektrum *Laplace*
$\boldsymbol{K_{1,1}}$	$spec_L\ K_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{K_{2,2}}$	$spec_L\ K_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{K_{3,3}}$	$spec_L\ K_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{K_{4,4}}$	$spec_L\ K_{4,4} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Dilihat dari Tabel 3.2, diperoleh bentuk umum spektrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ sebagai berikut

Akibat 3.1. Spektrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ adalah

$$spec_L\ K_{n,n} = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan pada Teorema 3.1, telah diketahui bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ yaitu

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)}$$

yang dihasilkan dari $\det(\lambda I_{2n} - L(K_{n,n})) = 0$, maka diperolah nilai eigennya $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = n$, dan $\lambda_2 = 2n$ dengan multiplisitasnya $m(\lambda_0) = 1$, $m(\lambda_1) = 2(n-1)$, dan $m(\lambda_2) = 1$. Jadi, terbukti benar bahwa nilai spektrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ adalah

$$spec_L\ K_{\boldsymbol{n,n}} = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)},$$

sehingga didapatkan nilai eigennya $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = n$, dan $\lambda_2 = 2n$ dengan multiplisitasnya $m(\lambda_0) = 1$, $m(\lambda_1) = 2(n-1)$, dan $m(\lambda_2) = 1$. Jadi, diperoleh bentuk umum spectrum *Laplace* dari graf bipartit lengkap $(K_{n,n})$ dengan $n > 1$ adalah

$$spec_L\, K_{n,n} = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

Penelitian ini membahas terkait pencarian formula *tree number* pada graf mahkota dengan menggunakan matriks *Laplace*. Kemudian, saran untuk penelitian selanjutnya yaitu dapat membahas polinomial karakteristik dan spektrum dari graf yang lainnya. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat menerapkan pengaplikasikan spektrum dari suatu graf terhadap persoalan kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Aldous, J. M. dan Wilson, R. J., *Graphs and Applications An Introductory Approach*, Springer, Great Britian, 2004.

Anton, H. dan Rorres, C., *Elementary Linear Algebra with Applications*, 9th Edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 2005.

Biggs, N., *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, New York, 1993.

Herianti, *Penentuan Spektrum Graf Bipartit Lengkap dengan Penggunaan Matriks Sirkulan*, Skripsi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, Makassar, 2016.

Larson, R. dan Falvo, D., *Elementary Linear Algebra*, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, 2009.

Munir, R., *Matematika Diskrit*, Informatika Bandung, Bandung, 2010.

Orden, D., Guzman, J. M., Maestre, I. M., dan Hoz, E. D., *Spectrum Graph Coloring and Applications to WiFi Channel Assigment*, Symmetry, **10**(3) (2017), 65-92.

Insani, N. dan Waryanto, N. H., *Penerapan Teori Graf pada Analisi Jejaring Sosial dengan Menggunakan Microsoft Microsoft Nodexl*, Pythagoras, **7**(1) (2012), 83-100.