Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)
FMIPA Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, 21 Desember 2022
Vol. 3 (2022), Hal. 65-72
ISSN (Cetak) : 2550-0384; ISSN (*Online*) : 2550-0392

MASALAH EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN SOLUSI PERSAMAAN BLACK-SCHOLES FRAKSIONAL MENGGUNAKAN OPERATOR RIEMANN-LIOUVILLE

Agus Sugandha*

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
agus.sugandha@unsoed.ac.id

Mashuri

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

Indra Herdiana

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

Siti Rahmah Nursiami

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

ABSTRACT. *This research aims to study the existence and uniqueness of a solution to fractional Black-Scholes equation. The method used is continuous Lipschitz mapping, Fixed Point Theorem, and the existence of a solution to the second type of fractional Voltera integral equation. The derivative operator used is Riemann-Liouville operator. The result obtained is that the solution to fractional Black-Scholes equation exists uniquely.*

Keywords. *fractional Black-Scholes equation, continuous Lipschitz mapping, fractional Voltera integral equation, Riemann-Liouville operator.*

ABSTRAK. Tujuan penelitian ini adalah menentukan eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan Black-Scholes Fraksional. Metode yang digunakan adalah pemetaan Lipschitz kontinu, teorema titik tetap dan eksisitensi solusi dari persamaan Integral Voltera fraksional jenis kedua. Sedangkan operator turunan yang digunakan adalah operator Riemann- Liouville. Hasil yang diperoleh adalah terjaminnya eksisitensi dan ketunggalan solusi dari persamaan Black-Scholes Fraksional

Kata Kunci: persamaan Black-Scholes fraksional, pemetaaan Leipschits kontinu,persamaan integral Volterra fraksional, operator Riemann- Liouville

1. PENDAHULUAN

Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut dikenal dengan metode

*Penulis Korespondensi

Black-Scholes. Dalam perkembanganya metode Black-Scholes untuk menentukan harga opsi, tidak hanya menjadi permasalahan dalam bidang matematika keuangan dan ekonomi saja, tetapi sudah berkembang juga untuk bidang matematika. Hal ini sangat wajar, karena persamaan Black-Scholes menggunakan model persamaan diferensial parsial. Dalam hal ini untuk mencari solusi dari persamaan diferensial parsial bukanlah suatu pekerjaan yang mudah. Untuk mencari solusi dari persamaan Black-Scholes dapat menggunakan teori integral Ito (Khaerudin & Massaresse, 2008), Transformasi Fourier (Kumar,Yildirin & Khan, 2012) atau secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga (Siswanto, dkk, 2014). Berdasarkan solusi yang diperoleh tersebut, kemudaian dapat ditentukan formula opsi put dan opsi *call*.

Berdasarkan persamaan Black-Scholes tersebut, kemudian dikembangkan oleh ahli matematika menjadi persamaan Black-Scholes fraksional. Dalam hal ini persamaan Black-Scholes merupakan kasus khusus dari persamaan Black-Scholes fraksional. Beberapa metode untuk mencari solusi persamaan Black Scholes fraksional adalah transformasi Sumudu, metode perturbasi homotopi, metode dekomposisi Adomian, Metode dekomposisi Adomian Laplace, dan metode transformasi diferensial. Pada hasil penelitian Taib, dkk. (2013), penyelesaian persaamaan Black-Scholes fraksional dilakukan dengan menggunakan gabungan antara metode perturbasi homotopi, metode transformasi Sumudu dan polinomial He's untuk menentukan solusi persamaan Black-Scholes fraksional. Penyelesaian persamaan Black-Scholes fraksional dapat dilakukan dengan menggunakan metode dekomposisi deret (Ghaedahari & Ranjbar, 2015). Menurut Khan dan Anyari (2016), penentuan solusi dari persamaan Black-Scholes fraksional diperoleh dengan menggunakan gabungan transformasi Sumudu dan kalkulus fraksional. Pada tahun 2018, Yavus dan Necati menyelesaikan persamaan Black-Scholes fraksional dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Pada tahun 2019, Kaya dan Yilmas, menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan sifat sifat transformasi Sumudu. Pada tahun yang sama, Uddin dan Taufiq mengunakan gabungan metode transformasi Laplace dan metode kernel radial untuk menentukan solusi dari persamaan Black-Scholes fraksional. Berdasarkan beberapa penelitian di atas solusi analitik dari persamaan Black-Scholes fraksional merupakan deret tak hingga fungsi Mittag-Lefler.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi literatur pada jurnal yang berkaitan dengan solusi persamaan fraksional Black-Scholes untuk membuktikan adanya masalah yang berkaitan dengan solusi persamaan fraksional Black-Scholes berdasarkan operator Riemann-Liouville. Untuk membuktikan eksistensi dan ketunggalan solusi untuk persamaan Black-Scholes fraksional, mengguakan teori titik tetap, pemetaan Lipschitz kontinu dan pemetaan kontaktif.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Black-Scholes fraksional adalah persamaan berbentuk

$$\frac{\partial^q \psi}{\partial \tau^q}+\frac{\sigma x^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+r(\tau)x\frac{\sigma\psi}{\partial x}-r(\sigma)\psi=0$$

dengan $(x,\ \tau)\in \mathbb{R}^+ \times (0,T)$, $0<q\leq 1$ (Khan & Ansari, 2016). Berdasarkan persamaan di atas, $\psi(x,\tau)$ adalah nilai opsi Eropa pada saat harga aset adalah x dan pada waktu τ, sedangkan T adalah *maturity*, $r(\tau)$ bunga bebas resiko dan $\sigma(x,r)$ menunjukkan fungsi volalitas dari aset dasar (*underlying asset)* (Ghaedahari & Ranjbar, 2015). Fungsi *payoff* dinyatakan sebagai $\psi_c(x,\tau)$=max$(x-E,0)$, $\psi_p(x,\tau)$=max$(E-x,0)$, dengan ψ_c dan ψ_p harga dari opsi *call* dan opsi *put* Eropa, sedangkan E adalah *exercise price* untuk opsi (Khan & Ansari, 2016). Arti simbol simbol yang ada didalam persamaan Black-Scholes fraksional adalah sama sama seperti pada persamaan Black-Scholes. Perbedaanya terletak pada orde turunan parsial ψ terhadap τ pada persamaan Black-Scholes adalah $q=1$, sedangkan pada persamaan Black Scholes fraksional adalah q dengan $0<q\leq 1$.

Definisi 2.1. (Operator integral fraksional Riemann-Liouville) (Khan & Ansari, 2016). Operator integral fraksional Riemann-Liouville berorde q dari fungsi $\mu(x)\in K_\omega$ dengan $\omega\geq -1$ didefinisikan sebagai berikut:

$$J^q\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(q)}\displaystyle\int_0^x (x-\tau)^{q-1}\psi(\tau)d\tau, q > 0, x > 0 \\ \qquad\qquad \psi(x) \qquad\qquad , q = 0 \end{cases}$$

Definisi 2.2. (Kreyszeig, 1978) Diberikan $X = (X, d)$ ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ disebut dengan kontraksi pada X jika terdapat bilangan real positip $\alpha < 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

Teorema 2.2. (Kreyszeig, 1978) Diberikan $X = (X, d)$ ruang metrik. Jika X lengkap dan $T: X \to X$ kontraksi pada X maka T memiliki satu titik tetap.

Teorema 2.3. (Atangana, 2013) Jika $G(t), K(t, \tau, F)$ kontinu di $0 < \tau \leq t \leq T < \infty, -\infty < F < \infty$ dan kernel $K(t, \tau, F)$ memenuhi kondisi Lipschitz, yaitu $\|K(t, \tau, F_1) - K(t, \tau, F_2)\| \leq H\|F_1 - F_2\|$, maka persamaan integral Volterra fraksional jenis kedua

$$F(t) = G(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[K(t, \tau, F(\tau)]d\tau$$

memiliki solusi tunggal.

Teorema 2.4. (Eksistensi dan Ketunggalan solusi) Persamaan Black-Scholes fraksional

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial \tau^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (k-1)\frac{\partial u}{\partial s} - ku$$

dengan menggunakan operator integral fraksional Riemann-Liouville memiliki solusi tunggal .

Bukti. Bukti eksistensi dan ketunggalan solusi menggunakan ide pembuktian Teorema 2.3. Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial \tau^\alpha} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + +(k-1)\frac{\partial u}{\partial s} - ku\right)$$

$$\left\| f(\tau, u_1(\tau,s) - f\big(\tau, u_0(\tau,s)\big) \right\|$$
$$\leq \left\{ \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2}(u_1 - u_0) \right\| + k\|u_0 - u_1\| + (k-1)\left\| \frac{\partial}{\partial s}(u_1 - u_0) \right\| \right\},$$

sehingga diperoleh

$$\left\| f(\tau, u_1(\tau,s) - f\big(\tau, u_0(\tau,s)\big) \right\|$$
$$\leq \{k_1 k_2 \|u_1 - u_0\| + k\|u_0 - u_1\| + k_3(k-1)\|u_1 - u_0\|\}$$
$$= \{k_1 k_2 + k + k_3(k-1) + \}\|u_0 - u_1\|.$$

dengan $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$. Berdasarkan ketidaksamaan di atas disimpulkan bahwa $f(\tau, u(\tau,s)$ kontinu Lipschitz.

Karena $f(\tau, u(\tau,s)$ kontinu Lipschitz, sehingga diperoleh

$$u_n(\tau,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\big(s,\tau,u_{n-1}(s,\tau)\big) d\tau,$$
$$\|u_n((\tau,s))\| = \max_{1\leq i\leq n} |u_i(\tau,s)|.$$

Didefinisikan δ_n dengan

$$\delta_n(\tau,s) = u_n(\tau,s) - u_{n-1}(s,\tau).$$

Karena f kontinu Lipschitz, terdapat $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\|f(\tau, u_{n-1}(s,\tau) - f(\tau, u_{n-2}(s,\tau)\| \leq k\|u_{n-1}(s,t) - u_{n-2}(s,\tau)\|$$
$$\|\delta_n(\tau,s)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [f(s,\tau,u_{n-1}(s,\tau) - f(s,\tau,u_{n-2}(s,\tau)] d\tau \right\|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} k \|u_{n-1}(s,\tau) - u_{n-2}(s,\tau)\| \; d\tau$$
$$= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\delta_{n-1}(\tau,s)\| \, d\tau \leq \max_{0\leq t\leq T} \frac{(k^{-\alpha} t)^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Didefinisikan nilai awal u_0,

$$u_0 = G(s,\tau)$$

dengan G fungsi kontinu, sehingga diperoleh

$$u(s,\tau) = G(t) + \sum_{i=1}^{n} \delta_n(\tau,s).$$

Jelas bahwa u merupakan fungsi kontinu. Sekarang cukup ditunjukkan bahwa $u(s,\tau)$ adalah persamaan integral Volterra jenis kedua. Didefinisikan $u(s,\tau)$ dengan

$$u(s,\tau) = u_n(\tau,s) + P_n(s,\tau$$

atau

$$u(s,\tau) - P_n(s,\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,[f(s,\tau,u(s,\tau)) - f(s,\tau,P_{n-1}(s,\tau)]d\tau$$

sehingga

$$\begin{aligned} u(s,\tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\big(s,\tau,u(s,\tau)\big)d\tau \\ = P_n(s,\tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,[f(s,\tau,u(s,\tau)) - P_{n-1}(s,\tau) \\ - f(s,\tau,u(s,\tau)]d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| u(s,\tau) - G(s,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\big(s,\tau,u(s,\tau)\big)d\tau \right\| \\ \le \|P_n(s,\tau)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\|P_{n-1}(s.\tau)\|d\tau \\ \le \|P_n(s,\tau)\| + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\,\|P_{n-1}(s.\tau)\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau \\ \le \|P_n(s,\tau)\| + \frac{kt}{\Gamma(\alpha+1)}\,\|P_{n-1}(s.\tau)\| \end{aligned}$$

Dengan mengambil limit untuk $n \to \infty$, diperoleh $\|P_n(s,\tau)\| \to 0$ dan $\|P_{n-1}(s.\tau)\| \to 0$. Jadi

$$u(s,\tau) = G(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\big(s,\tau,u(s,\tau)\big)$$

memiliki solusi tunggal.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa persamaan Black-Scholes Fraksional memiliki jaminan eksistensi dan ketunggalan solusi. Solusi persamaan Black-Scholes Fraksional merupakan suatu titik tetap.

DAFTAR PUSTAKA

Aguilar, J. P. dan Korbel J., *Option Pricing Model Driven by the space time-fractional Diffusion*, Series Representation and Application, **20**(8) (2017), 1-15.

Belgacem, F. B. M. dan Karaballi, A. A., *Sumudu Transform Fundamental Properties Investigation and Applications,* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **2006**(10) (2006), Article ID 9108, 1-23.

Elbeleze, A.A., Kilicman, A., dan Taib, B.M., *Homotopy Perturbation Method for Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equations Using Sumudu Transform,* Mathematical Problems in Engineering, **2013**(10) (2013), Article ID 524852, 1-7.

Eltayeb, H. dan Kilicman, A., *A Note On the Sumudu Transform and Differential Equations,* Applied Mathematical Sciences, **4**(22) (2010), 1089-1098.

Febrianti, W., *Penentuan Harga Opsi dengan Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Forward Time Central Space*, Journal of Fundamental Mathematics and Applications, **1**(1) (2018), 45-61.

Ghaedahari, M. A. M. dan Ranjbar, M., *European Option Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model Approach via Expansion in Series,* International Journal of Non Linear Science, **17**(2) (2014), 105-110.

Khaeruddin dan Massalesse, J., *Penentuan Harga Opsi Eropa Menggunakan Persamaan Black-Scholes*, Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, **4**(2) (2008), 104-116.

Khan, A. W., *European Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and its Derivatives*, General Letters In Mathematics, **1**(3) (2016), 74-80.

Khan, A. W. dan Ansari, F. A., *European Option Pricing of Fractional Black-Scholes Model Using Sumudu Transform and its Derivative,* General Letters in Mathematics, **1**(3) (2016), 74-80.

Khan, Y. dan Qingbiao, W. U., *Homotopy Perturbation Transform Method for Nonlinear Equation Using He's Polynomials,* Computers and Mathematics with Applications, **61**(10) (2011), *1963-1967.*

Kanth, A. S. V. R. dan Aruna, K., *Solution of Time fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation Arising in Financial Market,* Non Linear Engineering, **5**(4) (2016), 269-176.

Kreyszeig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley and Sons, Canada, 1978.

Kumar, A., Yildirim, A., Khan, Y., Jafari, H., Sayefand, K., dan Wei, L., *Analitical solution of fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation by Using Laplace Transform*, Journal of Fractional Calculus and Applications, **2**(8) (2012), 1-9.

Mathai, A. M. dan Haubold, H. J., *An Introduction to Fractional Calculus*, Nova Science Publisher Inc., New York, 2017.

Naghipour, A. dan Manafian, J., *Application of the Laplace Adomian Decomposition and Implicit Methods for Solving Burger's Equation*, Journal Pure Appl. Math., **6**(1) (2015), 68-77.

Ghaedahari, M. A. M. dan Ranjbar, M., *Barrier Options Pricing of Fractional Version of the Black-Scholes Model*, International Journal Industrial Mathematics, **7**(2) (2015), 105-110.

Uddin, M. dan Taufiq, M., *Approximation of Time Fractional Black-Scholes Equation Via Radial, Kernels and Transformation*, Fractional Differential Calculus, **9**(1) (2019), 75-90.

Yavuz, M. dan Ozdemir, N., *A Quantitative Approach to Fractional Option Pricing Problems with Docompotition Series*, Konuralp Journal of Mathematics, **6**(1) (2018), 102-109.