Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya 2018
p-ISSN : 2550-0384; e-ISSN : 2550-0392

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLE BENTUK *PRODUCT OF SUM* (*POS*) DENGAN METODE *MEV*

Melia Maemunah

Universitas Jenderal Soedirman
meliailofa24@gmail.com

ABSTRACT. *Map Entered Variable* (*MEV*) *is a method obtained from Karnaugh Map modification (K-Map) which can be used to simplify Boole function by inserting one or more variables in Boole function into K-Map. MEV variables that can be inserted into K-Map is as much as one variable to* $n-1$ *variables, with* n *is the number of variables in Boole function. MEV variables entered into K-Map must start from the rearmost variable. This study discusses about MEV simplifying rules to simplify the Boole function. The Boole function discussed is a Boole function in the form of a Product of Sum (POS)* n *variable, with.* $2 \le n \le 5$. *Based on the discussion of the simplification of the Boole function of the POS canonical form with the MEV method, there are seven simplifying rules which state the seven possible Boole function values that are different from the same MEV values of 0 and 1. The input variables in K-Map for each rule are obtained by multiplies the sum of the MEV values and the Boole value of a single line with the sum of the MEV values and the Boole value of other line.*

Keywords *: Boole function, Karnaugh Map, Map Entered Variable, Product of Sum.*

ABSTRAK. *Map Entered Variable* (*MEV*) merupakan metode yang diperoleh dari modifikasi Karnaugh *Map (*K-*Map*) yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boole dengan memasukkan satu atau lebih variabel pada fungsi Boole ke dalam K-*Map*. Variabel *MEV* yang dapat dimasukkan ke dalam K-*Map* adalah sebanyak satu variabel sampai $n-1$ variabel, dengan n merupakan banyaknya variabel pada fungsi Boole. Variabel *MEV* yang dimasukkan ke dalam K-*Map* harus dimulai dari variabel yang paling belakang. Penelitian ini membahas aturan penyederhanaan *MEV* untuk menyederhanakan fungsi Boole. Fungsi Boole yang dibahas adalah fungsi Boole dalam bentuk *Product of Sum* (*POS*) n variabel, dengan $2 \le n \le 5$. Berdasarkan pembahasan mengenai penyederhanaan fungsi Boole bentuk kanonik *POS* dengan metode *MEV* tersebut, terdapat tujuh aturan penyederhanaan yang menyatakan tujuh kemungkinan nilai-nilai fungsi Boole yang berbeda dengan *MEV value* yang sama yaitu 0 dan 1. Variabel masukan pada K-*Map* untuk setiap aturan diperoleh dengan mengalikan penjumlahan *MEV value* dan nilai fungsi Boole satu baris dengan penjumlahan *MEVvalue* dan nilai fungsi Boole baris lainnya.

Kata kunci : fungsi Boole, Karnaugh *Map*, *Map Entered Variable*, *Product of Sum*.

1. Pendahuluan

Fungsi Boole merupakan fungsi yang memetakan B^n terhadap B, dimana B^n merupakan himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n dan $B=\{0,1\}$.Fungsi Boole dapat diekspresikan ke dalam dua bentuk kanonik yang berbeda tanpa merubah nilai dari fungsi itu sendiri, yaitu *Sum of Product* (*SOP*) dan *Product of Sum* (*POS*). Fungsi Boole dikatakan dalam bentuk kanonik *SOP* jika fungsi tersebut berupa penjumlahan dari hasil kali semua variabelnya, dan dikatakan dalam bentuk *POS* jika fungsi tersebut berupa perkalian dari hasil jumlah semua variabelnya. Fungsi Boole dapat disederhanakan dengan 3 cara yaitu dengan penyederhanaan secara aljabar, dengan *Karnaugh Map* (K-*Map*), dan dengan metode tabulasi.

Map Entered Variable (*MEV*) merupakan metode yang dikembangkan dari metode K-*Map* yang juga dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boole. Metode *MEV* menjadi metode alternatif yang dapat meringkas tabel K-*Map* dengan cara memasukkan variabel pada tabel K-*Map*. Kemungkinan variabel yang dapat dimasukkan ke dalam tabel K-*Map* sebanyak $n-1$ variabel terakhir pada fungsi Boole, dengan n adalah jumlah variabel pada fungsi Boole. Penyederhanaan fungsi Boole dengan metode *MEV* dilakukan dengan mengelompokkan variabel secara duet, kuad, atau oktet.

Pada penelitian sebelumnya oleh Wulandari (2011), telah dibahas mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam metode *MEV* untuk menyederhanakan fungsi Boole dalam bentuk kanonik *SOP* sesuai dengan aturan penyederhanaan *SOP*. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk membahas aturan penyederhanaan fungsi Boole *POS* dalam metode *MEV* yang kemudian digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boole dalam bentuk kanonik *POS*.

2. Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka membahas mengenai landasan teori yang diperlukan pada pembahasan penelitian ini. Adapun landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

2.1 Aljabar Boole

Aljabar Boole merupakan sistem matematika yang terdiri atas suatu himpunan dengan dua operasi biner. Himpunan B dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ adalah aljabar Boole jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(1) Komutatif

Komutatif terhadap operasi $+$:

$\forall a, b \in B$ berlaku $a + b = b + a.$

Komutatif terhadap operasi $\cdot$:

$\forall a, b \in B$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a.$

(2) Mempunyai elemen identitas

Elemen identitas terhadap operasi $+$ (e_+):

$\forall a \in B$ maka $\exists e_+ \in B$ sedemikian sehingga berlaku $a + e_+ = e_+ + a = a.$

Elemen identitas terhadap operasi $\cdot (e_*)$:

$\forall a \in B$ maka $\exists e_* \in B$ sedemikian sehingga berlaku $a \cdot e_* = e_* \cdot a = a.$

(3) Distributif

Operasi $+$ distributif terhadap operasi $\cdot$:

$\forall a, b, c \in B$ berlaku $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$

Operasi $\cdot$ distributif terhadap operasi $+$:

$\forall a, b, c \in B$ berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$

(4) Mempunyai elemen komplemen

$\forall a \in B$ maka $\exists a' \in B$ sedemikian sehingga berlaku $a + a' = e_*$ dan $a \cdot a' = e_+.$

2.2 Fungsi Boole

Fungsi Boole adalah pemetaan

$$f : B^n \to B$$

dengan B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (*ordered* n*-tuple*) (Munir, 2010).

Misal $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ adalah fungsi Boole dengan n variabel. Elemen-elemen dari B^n berupa pasangan-pasangan terurut ganda-n yang merupakan semua kombinasi dari elemen $B = \{0,1\}$. Sebagai contoh, kombinasi nilai variabel-variabel dari fungsi Boole dengan dua variabel adalah {00, 01, 11, 10}, sedangkan kombinasi nilai variabel-variabel dari fungsi Boole dengan tiga variabel adalah {000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100}. Dengan demikian, kombinasi nilai variabel-variabel dari fungsi Boole dengan n variabel sebanyak 2^n.

2.3 Bentuk Kanonik

Fungsi Boole dapat ditulis dalam bentuk kanonik apabila dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari satu *minterm* atau lebih ataupun dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu *maxterm* atau lebih. Ada dua bentuk kanonik dalam fungsi Boole, yaitu:

a. *Sum of product* (*SOP*)

Fungsi Boole dalam bentuk *SOP* merupakan fungsi Boole yang berupa penjumlahan dari hasil kali atau fungsi Boole yang berupa penjumlahan dari satu *minterm* atau lebih, dinotasikan dengan $f(x_1, x_2, ..., x_n) = m_i + m_j$, dengan i, j merupakan indeks *minterm* yang diperoleh dari basis desimal string biner n-bit. Untuk selanjutnya penulisan $m_i + m_j$ dinotasikan dengan $\sum(i, j)$. String biner pada setiap suku *minterm* yang tercantum dalam fungsi Boole akan bernilai 1 pada tabel fungsi Boole, sedangkan string biner pada setiap suku *minterm* yang tidak tercantum dalam fungsi Boole akan bernilai 0 pada tabel fungsi Boole.

b. *Product of sum* (*POS*)

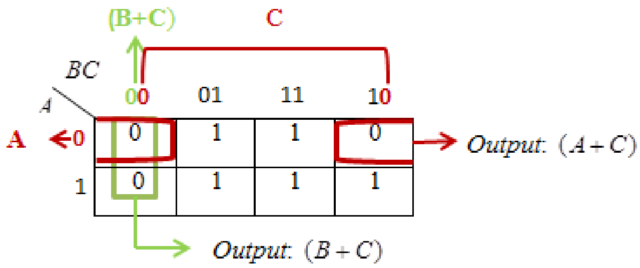
Fungsi Boole dalam bentuk *POS* merupakan fungsi Boole yang berupa perkalian dari hasil jumlah atau fungsi Boole yang berupa perkalian dari satu *maxterm* atau lebih, dinotasikan dengan $f(x_1, x_2, ..., x_n) = M_i \cdot M_j$, dengan i, j merupakan indeks *maxterm*nya. Untuk selanjutnya penulisan $M_i \cdot M_j$ dinotasikan dengan $\prod(i, j)$. String biner pada setiap suku *maxterm* yang tercantum dalam fungsi Boole akan bernilai 0 pada tabel fungsi Boole, sedangkan string biner pada setiap suku *maxterm* yang tidak tercantum dalam fungsi Boole akan bernilai 1 pada tabel fungsi Boole.

2.4 Karnaugh-*Map* (K-*Map*)

Karnaugh *Map* merupakan metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boole yang terbentuk dari kotak-kotak yang bersisian. Kotak-kotak pada K-*Map* yang bersisian didefinisikan sebagaikotak yang letaknya berdampingan antara kotak yangsatu dengan kotak yang lain. Setiap dua kotak bersisian pada K-*Map* mempunyai *kode gray* yang berbeda 1 bit. Banyaknya kotak yang terbentuk pada K-*Map* dipengaruhi oleh banyaknya variabel dalam fungsi Boole, yaitu dengan jumlah kotak sebanyak 2^n, dengan n adalah banyaknya variabel dalam fungsi Boole.

Penyederhanaan fungsi Boole dengan K-*Map* dapat dilakukan secara *SOP* maupun secara *POS*. Penyederhanaan fungsi Boole K-*Map* secara *SOP* adalah dengan menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 1 yang saling bersisian baik secara vertikal maupun horizontal, sedangkan penyederhanaan fungsi Boole K-*Map* secara *POS* adalah dengan menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 0 yang saling bersisian baik secara vertikal maupun horizontal. Kelompok kotak yang bernilai 1 atau 0 dapat digabungkan secara duet, kuad, dan oktet.

Misal diberikan fungsi Boole bentuk kanonik *POS* yaitu $g(A, B, C) = (A + B + C)(A + B' + C)(A' + B + C)$. Berikut adalah penyederhanaan fungsi Boole dengan K-*Map* secara *POS*.



Gambar 1 Representasi penggabungan kotak bernilai 0 pada fungsi Boole

$$g(A,B,C)=(A+B+C)(A+B'+C)(A'+B+C)$$

Kotak bernilai 0 yang bersisian yang digabungkan secara duet ditandai dengan kotak merah dan hijau pada Gambar 1. Kotak merah berada dinilai 0 pada baris A, dan berada di nilai 00 dan 10 pada kolom $(B+C)$ dan $(B'+C)$ sehingga penggabungan secara duet tersebut menghasilkan *output* $(A+C)$. Sedangkan kotak hijau berada dinilai 00 pada kolom $(B+C)$, sehingga penggabungan secara duet tersebut menghasilkan *output* $(B+C)$. Artinya, fungsi Boole $g(A,B,C)=\prod(0,2,4)$ dapat disederhanakan dengan K-*Map* secara *POS* menjadi $g(A,B,C)=(A+C)(B+C)$. Dengan menggunakan aksioma (iv) pada aljabar Boole, maka fungsi $g(A,B,C)=(A+C)(B+C)$ dapat disederhanakan menjadi $g(A,B,C)=C+AB$.

Bukti penyederhanaan secara aljabar:

Fungsi Boole $g(A,B,C)=\prod(0,2,4)$ juga dapat ditulis dalam bentuk

$$g(A,B,C)=(A+B+C)(A+B'+C)(A'+B+C)$$

$$=(A+B+C)(A+B+C)(A+B'+C)(A'+B+C) \qquad \text{(Sifat tautologi)}$$

$$=(A+B+C)(A+B'+C)(A+B+C)(A'+B+C) \qquad \text{(Sifat komutatif)}$$

$$=(A+BB'+C)(AA'+B+C) \qquad \text{(Sifat distributif)}$$

$$=(A+0+C)(0+B+C) \qquad \text{(Sifat komplemen)}$$

$= (A+C)(B+C)$ (Sifat identitas)

$= AB + C$ (Sifat distributif)

3. Hasil dan Pembahasan

Map Entered Variable merupakan metode yang diperoleh dari modifikasi K-*Map* yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boole. Metode *MEV* menjadi metode alternatif yang dapat meringkas tabel K-*Map* dengan cara memasukkan variabel pada tabel K-*Map.* Variabel *MEV* yang dapat dimasukkan ke dalam K-*Map* adalah sebanyak satu variabel sampai $n-1$ variabel terakhir pada fungsi Boole, dengan n merupakan banyaknya variabel pada fungsi Boole. Variabel *MEV* masukan harus dimulai dari variabel yang paling belakang.

String biner suku *maxterm* yang tercantum pada fungsi Boole bentuk *POS*, nilai fungsi Boolenya adalah 0. String biner suku *maxterm* yang tidak tercantum pada fungsi Boole bentuk *POS*, nilai fungsi Boolenya adalah 1. String biner suku *maxterm* dengan kondisi *don't care* nilai fungsi Boolenya adalah X. Pada penyederhanaan secara *POS*, *value* 0 menunjukkan variabel tanpa komplemen, sedangkan *value* 1 menunjukkan variabel dengan komplemen.

Selanjutnya akan ditentukan aturan penyederhanaan *POS* dalam metode *MEV*. Setiap aturan penyederhanaan meliputi *MEV value* pada variabel *MEV* masukan, nilai fungsi Boole, dan variabel masukan pada K-*Map*. Variabel masukan pada K-*Map* diperoleh dengan mengalikan penjumlahan *MEV value* dan nilai fungsi Boole satu baris dengan penjumlahan *MEV value* dan nilai fungsi Boole baris lainnya.

Variabel masukan pada K-*Map* bergantung pada *MEV value* dan nilai fungsi Boole. *MEV value* pada variabel *MEV* masukan selalu tetap, yaitu 0 dan 1, sedangkan nilai fungsi Boole berbeda-beda. Jadi, yang membedakan satu aturan dengan aturan lainnya adalah nilai fungsi Boole.

Jika *MEV value* pada variabel V sebagai variabel *MEV* masukan (0 dan 1) dimasukkan ke dalam sebuah fungsi Boole, maka diperoleh tujuh kemungkinan pasangan nilai fungsi Boole yang berbeda.

Bedasarkan tujuh kemungkinan pasangan nilai fungsi Boole tersebut, berikut diperoleh aturan penyederhanaan fungsi Boole dengan metode *MEV* secara *POS*.

Tabel 1 Aturan penyederhanaan fungsi Boole dengan metode *MEV* secara *POS*

Aturan	***MEV value***	**F**	**Variabel masukan pada K-*Map***
1	0 1	0 0	0
2	0 1	0 1	V
3	0 1	1 0	V'
4	0 1	1 1	1
5	0 1 0 1	X 0 0 X	0 0
6	0 1 0 1	X 1 1 X	1 1
7	0 1	X X	X

Misal diberikan fungsi Boole *POS* tiga variabel yaitu $f(A,B,C)=\prod(4,5,6)$ atau dapat juga ditulis dengan $f(A,B,C)=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C)$. Berikut adalah langkah-langkah menyederhanakan fungsi Boole

$f(A,B,C)=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C)$ menggunakan metode *MEV*secara *POS*.

- Variabel *MEV* masukan adalah variabel C

Tabel 2 Fungsi Boole $f(A,B,C)=\prod(4,5,6)$ dengan variabel masukan C

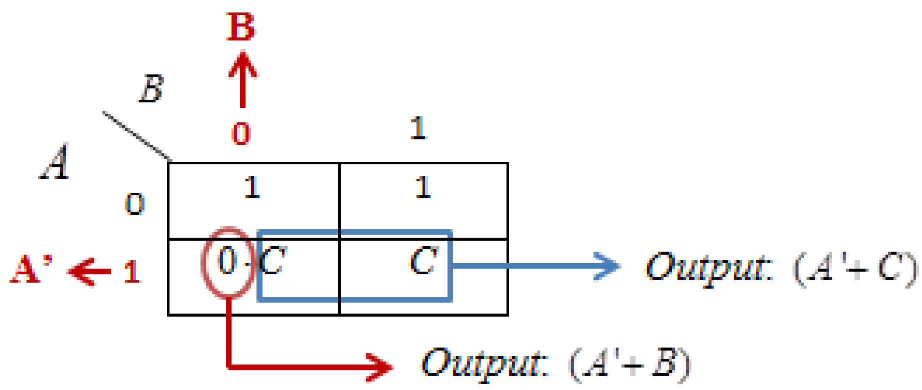
Desimal	Biner			$f(A,B,C)$	Variabel masukan pada K-*Map*
	A	B	C		
0	0	0	0	1	1 (Aturan 4)
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	1 (Aturan 4)
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	0 (Aturan 1)
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	C (Aturan 2)
7	1	1	1	1	

Dengan demikian Tabel 2 dapat direpresentasikan ke dalam K-*Map* berikut.

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1	0	C

Gambar 2 Representasi variabel masukan C pada K-*Map*

Berdasarkan Teorema 2.2 poin (ii) yaitu $a\cdot 0=0$, maka nilai 0 dapat ditulis dengan $0\cdot C$, sehingga Gambar 2 menjadi sebagai berikut.



Gambar 3. Representasi penyederhanaan dengan variabel masukan C pada K-*Map*

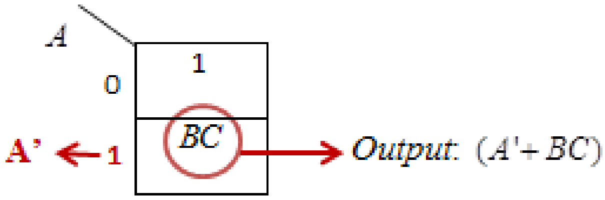
Kotak bernilai 0 yang ditandai dengan lingkaran merah pada Gambar 3 berada di nilai 1 pada baris A' dan di nilai 0 pada kolom B menghasilkan *output* $(A'+B)$, sedangkan kotak bernilai C digabungkan secara duet yang ditandai dengan kotak biru berada di nilai 1 pada baris A' menghasilkan *output* $(A'+C)$. Artinya, fungsi Boole $f(A,B,C)=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C)$ dapat disederhanakan menjadi $f(A,B,C)=(A'+B)(A'+C)$.

- Variabel *MEV* masukan adalah variabel BC

Tabel 3 Fungsi Boole $f(A,B,C)=\prod(4,5,6)$ dengan variabel masukan BC

Desimal	Biner			$f(A,B,C)$	Variabel masukan pada K-*Map*
	A	B	C		
0	0	0	0	1	$=(B+C+1)(B+C'+1)\ (B'+C+1)(B'+C'+1)$
1	0	0	1	1	$=1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
2	0	1	0	1	$=1$
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	$=(B+C+0)(B+C'+0)(B'+C+0)(B'+C'+1)$
5	1	0	1	0	$=(B+C)(B+C')(B'+C)1=(B+CC')(B'+C)$
6	1	1	0	0	$=(B+0)(B'+C)$
7	1	1	1	1	$=B(B'+C)=BB'+BC=0+BC=BC$

Dengan demikian Tabel 3 dapat direpresentasikan ke dalam K-*Map* berikut.



Gambar 4. Representasi penyederhanaan dengan variabel masukan BC pada K-*Map*

Kotak bernilai BC yang ditandai dengan lingkaran merah pada Gambar 4 berada di nilai 1 pada baris A' menghasilkan *output* $(A'+BC)$. Dengan menggunakan sifat aljabar Boole aksioma (iv), $(A'+BC)$ dapat ditulis dengan $(A'+B)(A'+C)$. Artinya, fungsi Boole $f(A,B,C)=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C)$ dapat disederhanakan menjadi $f(A,B,C)=(A'+B)(A'+C)$.

Bukti penyederhanaan secara aljabar:

$$f(A,B,C)=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C)$$

$$=(A'+B+C)(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C) \qquad \text{(Sifat tautologi)}$$

$$=(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B+C)(A'+B'+C) \qquad \text{(Sifat komutatif)}$$

$$=(A'+B+CC')(A'+BB'+C) \qquad \text{(Sifat distributif)}$$

$$=(A'+B+0)(A'+0+C) \qquad \text{(Sifat komplemen)}$$

$$=(A'+B)(A'+C). \qquad \text{(Sifat identitas)}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai penyederhanaan fungsi Boole bentuk kanonik *POS* dengan metode *MEV,* diperoleh kesimpulan berikut:

1. Terdapat tujuh aturan dalam penyederhanaan fungsi Boole bentuk kanonik *POS* dengan metode *MEV*. Setiap aturan tersebut menyatakan kemungkinan

pasangan nilai fungsi Boole yang berbeda. *MEVvalue* pada setiap aturan bernilai sama, yaitu 0 dan 1.

2. Variabel masukan pada K-*Map* untuk setiap aturan diperoleh dengan mengalikan penjumlahan *MEV value* dan nilai fungsi Boole satu baris dengan penjumlahan *MEV value* dan nilai fungsi Boole baris lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, A., *Aljabar Linier*, ITB, Bandung, 2000.

Munir, R., *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung, 2010.

Sitepu, S. A., *Study Metode Quine-McCluskey untuk Menyederhanakan Fungsi Digital*, Fakultas MIPA USU, Medan, 2009.

Whitesitt, J. E., *Boolean Algebra and its Application*, Addison-Wesley, London, 1961.

Wulandari, F., *Penggunaan MEV untuk Menyederhanakan Fungsi Boole*, Fakultas MIPA UNSOED, Purwokerto, 2011.