Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapannya (Senamantra)
FMIPA Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, 21 Desember 2022
Vol. 3 (2022), Hal. 103-116
ISSN (Cetak) : 2550-0384; ISSN (*Online*) : 2550-0392

SPEKTRUM *DETOUR* DAN INDEKS *DETOUR* DARI GRAF BERLIAN

Okty Kholifah

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
oktykholifah08@gmail.com

Siti Rahmah Nurshiami*

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
siti.nurshiami@unsoed.ac.id

Sri Maryani

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman
srimary_math_97@yahoo.com

ABSTRACT. *This study aims to determine the detour spectrum and the detour index from the diamond graph Br_n. The detour matrix of a graph G is a symmetric matrix whose entries are the length of the longest path from the i-th vertex to the j-th vertex. The detour spectrum is the set of eigenvalues and multiplicity obtained from the detour matrix. The detour index is the half sum of the elements of the detour matrix. Determination of the detour spectrum begins by determining the characteristic polynomial of a diamond graph of Br_n with $n \geq 3$. The results show that the characteristic polynomial of a diamond graph of Br_n with $n \geq 3$ is $P(\mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1}$. Furthermore, the detour spectrum of the diamond graph Br_n with $n \geq 3$ is $spec_{DD}(Br_n) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & (2n-1) \end{bmatrix}$. This study also obtained the detour index of diamond graph Br_n with $n \geq 3$ is $\omega(Br_n) = n(2n-1)^2$.*

Keywords*: characteristic polynomial, detour spectrum, detour index, diamond graph.*

ABSTRAK. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian Br_n. Matriks *detour* suatu graf G adalah matriks simetris yang entri-entrinya merupakan panjang lintasan terpanjang dari simpul ke-i sampai simpul ke-j. Spektrum *detour* adalah kumpulan nilai eigen dan multiplisitas yang diperoleh dari matriks *detour*. Indeks *detour* adalah setengah dari jumlah entri-entri pada matriks *detour*. Penentuan spektrum *detour* diawali dengan menentukan polinomial karakteristik dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa polinomial karakteristik dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ adalah $P(\mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1}$. Selanjutnya, diperoleh spektrum *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$, yaitu $spec_{DD}(Br_n) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & (2n-1) \end{bmatrix}$. Pada penelitian ini juga diperoleh indeks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$, yaitu $\omega(Br_n) = n(2n-1)^2$.

Kata kunci: polinomial karakteristik, spektrum *detour*, indeks *detour*, graf berlian.

*Penulis Korespondensi

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang muncul pertama kali melalui tulisan Euler pada tahun 1736. Tulisan Euler berisi tentang pemecahan masalah jembatan Konigsberg di Eropa. Euler mengatasi masalah tersebut dengan memodelkannya ke dalam bentuk graf. Menurut Rosen (2012:641), suatu graf G terdiri dari $V(G)$ dan $E(G)$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan dari elemen-elemen yang disebut simpul (*vertices*) dan $E(G)$ merupakan himpunan elemen-elemen yang disebut sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf. Simpul-simpul pada graf dinyatakan dalam bentuk titik atau noktah dan sisi-sisi pada graf dinyatakan dalam bentuk garis.

Graf G dapat direpresentasikan ke dalam suatu matriks. Salah satu matriks yang dapat merepresentasikan graf adalah matriks *detour*. Matriks *detour* adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan panjang lintasan terpanjang dari simpul yang satu ke simpul yang lain (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

Sifat-sifat aljabar dalam representasi matriks pada suatu graf dapat dikaitkan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen. Salah satu permasalahan yang muncul dalam kajian aljabar dan teori graf adalah menentukan spektrum graf. Spektrum suatu graf merupakan kumpulan nilai eigen dengan multiplisitasnya (Biggs, 1993:8). Spektrum yang diperoleh dari matriks *detour* pada suatu graf disebut sebagai spektrum *detour* atau $spec_{DD}(G)$. Jika matriks *detour* memiliki bentuk simetris, maka semua nilai eigen adalah bilangan riil. Jika $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_g$ adalah nilai eigen berbeda dan $m_1, m_2, \ldots, m_g$ merupakan multiplisitasnya, maka spektrum *detour* pada suatu graf dapat dituliskan sebagai berikut (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010):

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_g \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix}.$$

Indeks detour juga dapat diperoleh dari matriks *detour*. Indeks *detour* yang dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai setengah dari jumlah elemen-elemen pada matriks *detour* (Gayathri dan Ragavan, 2019). Indeks detour dapat ditulis sebagai berikut:

$$\omega(G) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}$$

Penelitian tentang spektrum *detour* pada graf sebelumnya telah dilakukan oleh Dewi (2011), dan Abdy dkk (2020). Pada penelitiannya, Dewi (2011) mengkaji spektrum *detour* dari graf *n*-partisi komplit ($K_{n,n+1,n+2,\ldots,n+m}$) dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 1$. Abdy dkk (2020) meneliti bentuk umum spektrum *detour* dari graf roda (W_n) dengan $n + 1$ titik yang diperoleh dari representasi matriks *detour* pada graf tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji bentuk umum spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

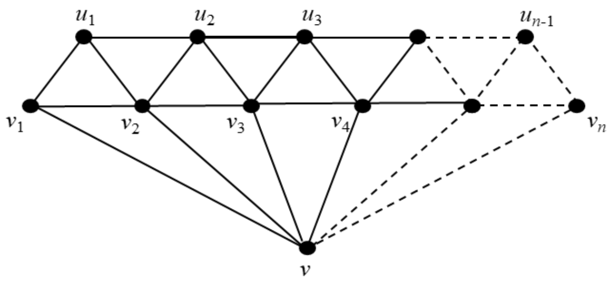
1. Menggambar bentuk graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$.
2. Menentukan matriks *detour* dari graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$.
3. Menentukan polinomial karakteristik dari graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$ untuk memperoleh nilai eigen dan multiplisitasnya, serta menentukan indeks *detour*nya.
4. Merumuskan bentuk umum spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf berlian merupakan graf yang memiliki simpul sebanyak $2n$. Menurut Syafnur dkk. (2018), graf berlian dengan $n \geq 3$ dinotasikan Br_n memiliki simpul dan sisi yang didefinisikan sebagai berikut:

$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n-1\}$

$$E(Br_n) = \{vv_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-2\} \\ \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$$

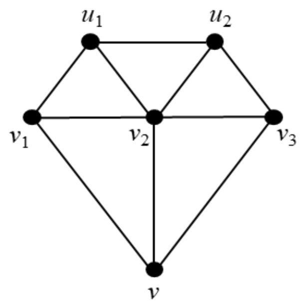


Gambar 1 Graf Berlian (Br_n)

Pembahasan bentuk umum spektrum *detour* dan indeks *detour* dari graf berlian Br_n dibatasi pada $n \geq 3$ dan n bilangan asli. Sebelumnya, akan dilihat pola polinomial karakteristik dan indeks *detour* pada graf berlian Br_3, Br_4, Br_5, dan Br_6.

1. Graf Berlian Br_3

Graf berlian Br_3 dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2 Graf berlian Br_3

Berdasarkan Gambar 2, matriks *detour* dari graf berlian Br_3 adalah sebagai berikut:

$$DD(Br_3) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan polinomial karakteristik graf berlian Br_3, yaitu:

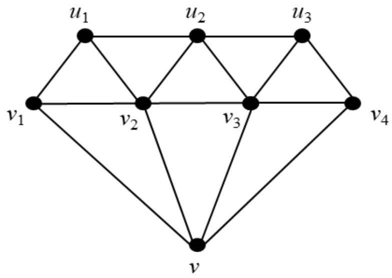
$$p(Br_3, \mu) = (\mu - 25)(\mu + 5)^5.$$

Indeks *detour* graf berlian Br_3 adalah:

$$\omega(Br_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{6} d_{ij} = \frac{1}{2} \times 150 = 75.$$

2. Graf Berlian Br_4

Graf berlian Br_4 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Graf berlian Br_4

Berdasarkan Gambar 3, matriks *detour* dari graf berlian Br_4 adalah sebagai berikut:

$$DD(Br_4) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan polinomial karakteristik graf berlian Br_4, yaitu:

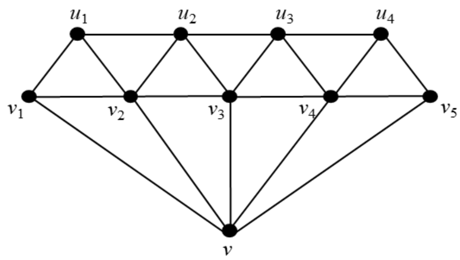
$$p(Br_4, \mu) = (\mu - 49)(\mu + 7)^7.$$

Indeks *detour* graf berlian Br_4 adalah:

$$\omega(Br_4) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{8} d_{ij} = \frac{1}{2} \times 392 = 196.$$

3. Graf Berlian Br_5

Graf berlian Br_5 dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Graf berlian Br_5

Berdasarkan Gambar 4, matriks *detour* dari graf berlian Br_5 adalah sebagai berikut

$$DD(Br_5) = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan polinomial karakteristik graf berlian Br_5, yaitu:

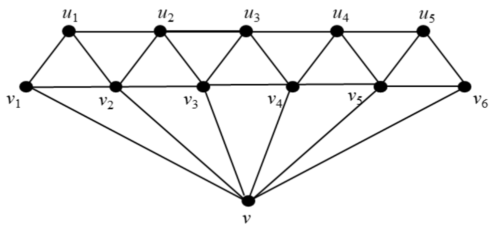
$$p(Br_5, \mu) = (\mu - 81)(\mu + 9)^9.$$

Indeks *detour* graf berlian Br_4 adalah:

$$\omega(Br_5) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{10} d_{ij} = \frac{1}{2} \times 810 = 405.$$

4. Graf Berlian Br_6

Graf berlian Br_6 dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5 Graf berlian Br_6

Berdasarkan Gambar 5, matriks *detour* dari graf berlian Br_6 adalah sebagai berikut:

$$DD(Br_6) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan polinomial karakteristik graf berlian Br_6, yaitu:

$$p(Br_6,\mu) = (\mu - 121)(\mu + 11)^{11}.$$

Indeks *detour* graf berlian Br_6 adalah:

$$\omega(Br_6) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{12} d_{ij} = \frac{1}{2} \times 1452 = 726.$$

Berdasarkan perhitungan polinomial karakteristik matriks *detour* pada graf berlian Br_3, Br_4, Br_5, dan Br_6, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

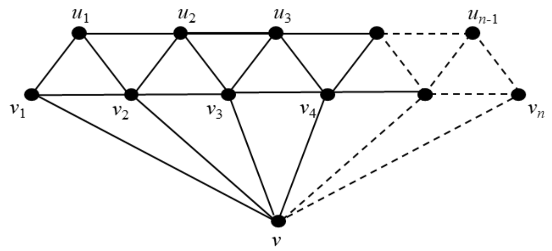
Tabel 1 Polinomial karakteristik matriks *detour* graf berlian Br_n

No	Graf Berlian	Polinomial Karakteristik
1	Br_3	$(\mu - 25)(\mu + 5)^5$
2	Br_4	$(\mu - 49)(\mu + 7)^7$
3	Br_5	$(\mu - 81)(\mu + 9)^9$
4	Br_6	$(\mu - 121)(\mu + 11)^{11}$

Proposisi 3.1. Polinomial karakteristik matriks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli adalah

$$p(Br_n,\mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1}$$

Bukti. Graf berlian Br_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 6 Graf Berlian Br_n

Berdasarkan Gambar 6, dapat dilihat graf berlian Br_n memiliki simpul sebanyak $2n$ sehingga matriks *detour*nya berukuran $2n \times 2n$. Matriks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ dimisalkan $DD(Br_n) = [d_{ij}]$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$d_{ij} = \begin{cases} 2n-1, & \text{jika } i \neq j \\ 0, & \text{jika } i = j \end{cases}$$

$$DD(Br_n) = \begin{bmatrix} 0 & (2n-1) & (2n-1) & \cdots & (2n-1) \\ (2n-1) & 0 & (2n-1) & \cdots & (2n-1) \\ (2n-1) & (2n-1) & 0 & \cdots & (2n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (2n-1) & (2n-1) & (2n-1) & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks $DD(Br_n)$, maka akan dicari polinomial karakteristiknya dengan menentukan det (μI – DD (Br_n)) $=$ 0

$$\begin{vmatrix} \mu & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ -(2n-1) & \mu & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ -(2n-1) & -(2n-1) & \mu & \cdots & -(2n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, matriks det (μI – DD (Br_n)) direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \mu & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ 0 & \frac{\mu^2-(2n-1)^2}{\mu} & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu} & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu} & \cdots & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\mu^2-(2n-1)\mu-2(2n-1)^2}{\mu-(2n-1)} & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu-(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu-(2n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu^2-2(2\mu-1)\mu-3(2n-1)^2}{\mu-2(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)(\mu+(2n-1))}{\mu-2(2n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu^2-(2n-2)(2n-1)\mu-(2n-1)^3}{\mu-(2n-2)(2n-1)} \end{bmatrix},$$

$\det\big(\mu I - DD(Br_n)\big)$ adalah hasil perkalian elemen diagonal utama dari matriks segitiga atas, maka diperoleh polinomial karakteristiknya, yaitu:

$$p(Br_n, \mu) = \big(\mu) + (2n-1)\big)^{2n-1}.\big(\mu - (2n-1)(2n-1)\big).$$

Karena $\det\big(\mu I - DD(Br_n)\big) = 0$, maka

$$\det\big(\mu I - DD(Br_n)\big) = 0$$

$$(\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1} = 0.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa polinomial karakteristik matriks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ adalah

$$p(Br_n, \mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1}.$$

Akibat 1. Spektrum *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli adalah

$$spec_{DD}(Br_n) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & (2n-1) \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan proposisi 3.1, diketahui bahwa polinomial karakteristik matriks detour adalah

$$p(Br_n, \mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1},$$

sehingga diperoleh nilai eigen $\mu_1 = (2n-1)^2$ atau $\mu_2 = -(2n-1)$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk $\mu_1 = (2n-1)^2$ terdapat basis ruang eigen sebanyak 1. Solusi untuk $\det\big((2n-1)^2 I - DD(Br_n)\big) = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ 0 & \frac{(2n-1)^4-(2n-1)^2}{(2n-1)^2} & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2} & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2} & \cdots & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{(2n-1)^4-(2n-1)(2n-1)^2-2(2n-1)^2}{(2n-1)^2-(2n-1)} & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2-(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2-(2n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)^4-2(2n-1)(2n-1)^2-3(2n-1)^2}{(2n-1)^2-2(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)((2n-1)^2+(2n-1))}{(2n-1)^2-2(2n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)^4-(2n-2)(2n-1)(2n-1)^2-(2n-1)^3}{(2n-1)^2-(2n-2)(2n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ 0 & 4n^2-4n & -2n & -2n & \cdots & -2n \\ 0 & 0 & \frac{(2n-1)^3-(2n-1)^2-2(2n-1)}{2n-2} & \frac{-\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-2} & \cdots & \frac{-\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)^3-2(2n-1)^2-3(2n-1)}{2n-3} & \cdots & \frac{-\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)^3-(2n-2)(2n-1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$(2n-1)^2 x_1 - (2n-1)x_2 - (2n-1)x_3 - (2n-1)x_4 + \cdots - (2n-1)x_{2n} = 0$$

$$(4n^2-4n)x_2 - 2nx_3 - 2nx_4 + \cdots - 2nx_{2n} = 0$$

$$\frac{(2n-1)^3-(2n-1)^2-2(2n-1)}{2n-2}x_3 - \frac{\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-2}x_4 + \cdots - \frac{\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-2}x_{2n} = 0$$

$$\frac{(2n-1)^3-2(2n-1)^2-3(2n-1)}{2n-3}x_4 + \cdots - \frac{\left((2n-1)^2+(2n-1)\right)}{2n-3}x_{2n} = 0$$

$$\frac{(2n-1)^3-(2n-2)(2n-1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)}x_{2n} = 0.$$

Didapat $x_1 = x_{2n}, x_2 = x_{2n}, x_1 = x_{2n}, \ldots, x_{2n-1} = x_{2n}$. Misalkan $x_{2n} = s$, maka vektor eigennya adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\mu_1 = (2n-1)^2$ adalah 1. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk $\mu_2 = -(2n-1)$ terdapat basis ruang eigen sebanyak $(2n-1)$. Solusi untuk $\det\left(\left(-(2n-1)\right)I - DD(Br_n)\right) = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ 0 & \frac{(-(2n-1))^2-(2n-1)^2}{(-(2n-1))} & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))} & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))} & \cdots & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))} \\ 0 & 0 & \frac{(-(2n-1))^2-(2n-1)(-(2n-1))-2(2n-1)^2}{(-(2n-1))-(2n-1)} & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))-(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))-(2n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-(2n-1))^2-2(2n-1)(-(2n-1))-3(2n-1)^2}{(-(2n-1))-2(2n-1)} & \cdots & \frac{-(2n-1)((-(2n-1))+(2n-1))}{(-(2n-1))-2(2n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(-(2n-1))^2-(2n-2)(2n-1)(-(2n-1))-(2n-1)^3}{(-(2n-1))-(2n-2)(2n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix} =$$

$$0$$

$$\begin{bmatrix} -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$-(2n-1)x_1 - (2n-1)x_2 - (2n-1)x_3 - (2n-1)x_4 + \cdots - (2n-1)x_{2n} = 0$$

$$-(2n-1)x_1 = (2n-1)x_2 + (2n-1)x_3 + (2n-1)x_4 + \cdots + (2n-1)x_{2n}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - \cdots - x_{2n},$$

maka vektor eigennya adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \cdots - x_{2n-1} - x_{2n} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{2n-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{2n} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\mu_2 = -(2n-1)$ adalah $(2n-1)$. Dapat disimpulkan bahwa untuk $\mu_1 = (2n-1)^2$ terdapat 1 basis ruang vektor eigen dan untuk $\mu_2 = -(2n-1)$ terdapat $(2n-1)$ basis ruang vektor eigen, maka terbukti bahwa spektrum *detour* dari graf berlian Br_n adalah

$$spec_{DD}(Br_n) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & (2n-1) \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan hasil perhitungan indeks *detour* dari graf berlian Br_3, Br_4, Br_5, dan Br_6, maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 2 Indeks *detour* dari graf berlian Br_n

No	Graf Berlian	$\omega(Br_n)$
1	Br_3	$\omega(Br_3) = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times 5 = 75$
2	Br_4	$\omega(Br_4) = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times 7 = 196$
3	Br_5	$\omega(Br_5) = \frac{1}{2} \times 10 \times 9 \times 9 = 405$
4	Br_6	$\omega(Br_6) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times 11 = 726$

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa bentuk umum indeks *detour* dari graf berlian Br_n adalah sebagai berikut:

Proposisi 2. Indeks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli adalah

$$\omega(Br_n) = n(2n-1)^2$$

Bukti. Berdasarkan matriks $DD(Br_n)$, jarak untuk setiap pasangan simpul ij adalah sebesar $2n-1$ sehingga $d_{ij} = 2n-1$ jika $i \neq j$. Perhatikan simpul i. Terdapat sebanyak $2n-1$ simpul yang berjarak sebesar $2n-1$ dari simpul i, sehingga untuk setiap simpul i dapat dihitung jumlahnya adalah $(2n-1)^2$. Diketahui bahwa jumlah simpul pada suatu graf berlian $Br_n = 2n$, maka jumlah dari jarak semua pasangan simpul adalah

$$\sum_{i,j=1}^{2n} d_{ij} = 2n(2n-1)^2$$

Dengan demikian, terbukti bahwa indeks *detour* dari graf berlian Br_n dengan $n \geq 3$ adalah

$$\omega(Br_n) = n(2n-1)^2.$$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian pada pembahasan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. bentuk umum polinomial karakteristik matriks *detour* graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$ adalah
$$P(Br_n, \mu) = (\mu - (2n-1)^2)\big(\mu + (2n-1)\big)^{2n-1}.$$
2. bentuk umum spektrum *detour* graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$ adalah
$$spec_{DD}(Br_n) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & (2n-1) \end{bmatrix}.$$
3. bentuk umum indeks matriks *detour* graf berlian (Br_n) dengan $n \geq 3$ adalah
$$\omega(Br_n) = n(2n-1)^2.$$

Untuk penelitian selanjutnya dapat diteliti spektrum *detour* dan indeks *detour* pada jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M., Syam, R., dan Putri, A. M., *Spectrum Matriks Detour dari Graf Roda dengan n+1 Titik Wn*, Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, **3**(1) (2020), 32-40.

Ayyaswamy, S. K. dan Balachandran, S., *On Detour Spectra of Some Graphs*, International Journal of Mathematical and Computational Sciences, **4**(7) (2010), 1038-1040.

Biggs, N., *Algebraic Graph Theory*, Edisi Kedua, Cambridge University Press, New York, 1993.

Dewi, D. N., *Spektrum Detour Graf n-Partisi Komplit*, Jurnal CAUCHY, **2**(1) (2011), 13-17.

Gayathri, P. dan Ragavan, T., *An Analysis on The Wiener Number and The Spectrum of Detour Matrix of The Molecular Graph of Benzenoid Hydrocarbon*, Malaya Journal Of Matematik, **S**(1) (2019), 549-553.

Rosen, K. H., *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi Ketujuh, McGraw-Hill, New York, 2012.

Syafnur, M. R., Yulianti, L., dan Welyyanti, D., *Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Berlian Brn untuk n=3 dan n=4*, Jurnal Matematika UNAND, **7**(2) (2018).